



7. ถ้า $\sin x + \cos x = -\frac{1}{5}$ และ $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi$ แล้ว $\cos 2x$ เท่ากับข้อใด
 ก. $\frac{7}{25}$ ข. $-\frac{7}{25}$ ค. $\frac{24}{25}$ ง. $-\frac{24}{25}$
8. สี่เหลี่ยม ABCD มีมุม B และ D เป็นมุมฉาก ถ้าสี่เหลี่ยม ABCD เป็นสี่เหลี่ยมรูปว่าว โดยที่ $AB = AD = 20$ หน่วย. และ $BC = CD = 15$ หน่วย แล้ววงกลมซึ่งแนบในสี่เหลี่ยม ABCD มีรัศมียาวเท่าไร
 ก. 5 หน่วย ข. 10 หน่วย ค. $\frac{60}{7}$ หน่วย ง. $\frac{300}{7}$ หน่วย
9. ชายคนหนึ่งขี่มอเตอร์ไซด์ขึ้นเขาด้วยความเร็ว 40 กม./ชม. จากนั้นขี่ลงเขาไปยังจุดเริ่มต้นด้วยความเร็ว 80 กม./ชม. อยากทราบว่าเขาขี่มอเตอร์ไซด์ ด้วยความเร็วเฉลี่ยกี่กิโลเมตรต่อชั่วโมง
 ก. 120 กม./ชม. ข. 60 กม./ชม. ค. $53\frac{1}{3}$ กม./ชม. ง. $63\frac{1}{3}$ กม./ชม.
10. ขวด 2 ใบ มีปริมาตรเท่ากัน บรรจุแอลกอฮอล์ผสมน้ำในอัตราส่วน 3 : 1 และ 2 : 1 เท็มขวด ถ้านำสารละลายใน 2 ขวดมาผสมกัน จะได้ว่าสารละลายที่ผสมกันแล้วมีแอลกอฮอล์และน้ำในอัตราส่วนเท่าใด
 ก. 5 : 2 ข. 4 : 3 ค. 7 : 4 ง. 17 : 7
11. ให้ $A = \{a, b, c\}$ และ $P(A)$ คือเพาเวอร์เซตของ A ถ้า s คือจำนวนฟังก์ชัน f จาก $P(A)$ ไป A และ t คือจำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป $P(A)$ แล้ว $s - t$ เท่ากับเท่าไร
 ก. 6225 ข. 5226 ค. 2625 ง. 2526

12. บทนิยาม X เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U
 f_x เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$f_x(a) = \begin{cases} 1 & ; a \in X \\ 0 & ; a \in X' \end{cases}$$

ให้ R เป็นเอกภพสัมพัทธ์

$A = \{x \in R \mid x^3 - 3x - 2 > 0\}$ และ $t = f_A((1.415)^2) + f_A(1) + f_A(0.5) + f_A(-1)$

แล้ว t มีค่าเท่ากับเท่าไร

- ก. 0 ข. 1 ค. 2 ง. 3



13. กำหนดให้ $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$ และ $(f_n + f_n f_{n-1})(x) = 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 1

แล้ว $f_8(1) - f_2(3)$ เท่ากับข้อใด

- ก. $-\frac{2}{11}$ ข. 0 ค. $\frac{1}{5}$ ง. 1

14. $\sqrt{(1+x)^2 + (2-y)^2} = |x+2|$ เป็นสมการของกราฟแบบใด

- ก. เส้นตรง ข. พาราโบลา ค. เส้นตรง 2 เส้น ง. วงรี

15. ถ้าสำหรับทุกจำนวนจริงบวก x , $[f(x^2 + 1)]^{\sqrt{x}} = k$, k เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริงบวก

จงหาค่าของ $\left[f\left(\frac{9+y^2}{y^2}\right) \right]^{\sqrt{\frac{12}{y}}}$, y เป็นจำนวนจริงบวก

- ก. \sqrt{k} ข. $2k$ ค. k^2 ง. $y\sqrt{k}$

16. กราฟของสมการ $x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$ มีลักษณะอย่างไร

- ก. วงกลม ข. วงรีครึ่งซีกขวา
ค. ไฮเพอร์โบลาสาขาทางขวา ง. ไฮเพอร์โบลาสาขาทางซ้าย

17. กำหนดเส้นตรง $3x + 4y = 13$

จงหาระยะทางที่ใกล้ที่สุดของจุดบนวงกลม $20x^2 - 28x + 20y^2 - 16y - 7 = 0$ กับเส้นตรงนี้

- ก. 0.36 หน่วย ข. 0.86 หน่วย ค. 1.86 หน่วย ง. 2.86 หน่วย

18. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - y^2 - 4y - 3 = 0\}$

โดเมนและเรนจ์ของ r เป็นอย่างไร

- ก. เป็นช่วงปิดทั้งคู่ ข. เป็นเซตที่มีสมาชิกตัวเดียวทั้งคู่
ค. อยู่ในรูป $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$ โดยที่ $a < b$ ง. เป็น \mathbb{R} ทั้งคู่

19. อินเวอร์สของความสัมพันธ์ใดไม่เป็นฟังก์ชัน

ก. $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x + \frac{1}{x}\}$

ข. $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}\}$

ค. $r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, xy > 0\}$

ง. $r_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x|x|\}$



20. จงหาจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ ซึ่งห่างจากจุด $(1, 3)$ และ $(-2, 2)$ เท่ากัน

ก. $(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13})$ กับ $(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$

ข. $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ กับ $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

ค. $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ กับ $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

ง. $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ กับ $(0, 1)$

21. กำหนดวงกลม 3 วง ดังนี้ $r_1 : x^2 + y^2 = 1$

$$r_2 : (x - 2)^2 + y^2 = 1$$

$$r_3 : (x - 4)^2 + y^2 = 1$$

ให้ A และ D เป็นจุดบนวงกลม r_1 และ r_3 ตามลำดับ ซึ่งระยะ AD ยาวที่สุด ลากส่วนของเส้นตรง AG สัมผัสวงกลม r_3 ที่ G ซึ่งอยู่เหนือแกน X และ เส้นตรง AG ตัดวงกลม r_2 ที่ E และ F ตามลำดับ แล้ว ระยะ EF เท่ากับข้อใด

ก. $\frac{3}{5}$ หน่วย

ข. $\frac{4}{5}$ หน่วย

ค. $\frac{8}{5}$ หน่วย

ง. $\frac{3\sqrt{24}}{5}$ หน่วย

22. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \geq 0$ และ $b \geq 0$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$

ข. $\frac{a+b}{2} \neq \sqrt{ab}$

ค. $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab}$

ง. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

23. a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a < b$ ถ้า a และ b สอดคล้องสมการ $\sqrt{10 + \sqrt{84}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ แล้ว $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าไร

ก. 25

ข. 41

ค. 45

ง. 58

24. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{1}{x + \sqrt{x}} + \frac{1}{x - \sqrt{x}} \leq 1$ อินเตอร์เซกกับเซตในข้อใดได้เซตว่าง

ก. $(-\infty, 0] \cup [1, 3)$

ข. $(1, 3] \cup (5, \infty)$

ค. $(-\infty, 1) \cup (7, 11)$

ง. $(-5, 5)$

25. ถ้า $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 = (Ax^2 + Bx + C)^2$ แล้ว $A^2 + B^2 + C^2$ เท่ากับข้อใด

ก. 14

ข. 36

ค. 51

ง. 62

**ตอนที่ 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ 10 ข้อ ๆ ละ 2 คะแนน**

1. ถ้า $x * (x - y) = x^2 + y^2$ แล้ว $5 * 3$ เท่ากับเท่าไร
2. ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านยาว $x - 7$, x และ $x + 1$ หน่วย แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด
3. กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งหารด้วย 3, 4, 5, 6, และ 7 จะเหลือเศษ 2, 3, 4, 5, และ 6 ตามลำดับ ค่า n ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้เท่ากับเท่าไร
4. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ใหญ่ที่สุด ในบรรดาจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 1,030,301 ซึ่งหาร 1,030,301 ลงตัว แล้ว n เท่ากับเท่าไร
5. กำหนด $f(x) = x^2 + 4x$ และ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(f(x)) = f(x)\}$ แล้ว $P(A)$ มีสมาชิกกี่ตัว
6. กำหนด $A = \{(x, y) \mid x \text{ และ } y \text{ เป็นจำนวนเต็ม และ } x^2 + 4x + y^2 = 9\}$ แล้ว A มีสมาชิกกี่ตัว
7. กำหนดให้ $f_a(n) = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - a)$ เมื่อ a, n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a < n$
 $f_1\left(\frac{f_3(27)}{f_2(26)}\right)$ เท่ากับเท่าใด
8. กำหนดฟังก์ชัน f มีสมบัติดังนี้
 - ก. $f(0) \neq 0$
 - ข. สำหรับจำนวนจริง x และ y ใด ๆ $f(xy) = f(x)f(y)$ ดังนั้น $f(2533)$ เท่ากับเท่าไร
9. พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ล้อมรอบโดยกราฟของ $|x| + |y| = 2$ เท่ากับกี่ตารางหน่วย
10. ให้เส้นรอบรูปของสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีความยาวเท่ากับ 60 หน่วย และความสูงซึ่งตั้งฉากกับด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับ 12 หน่วย ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับเท่าไร

**แบบทดสอบฉบับที่ 2****สอบวันที่ 25 สิงหาคม 2533****เวลา 15.30 – 16.30 น.**

ข้อสอบมีทั้งหมด 3 ข้อ ๆ ละ 10 คะแนน ให้แสดงวิธีทำทุกข้อ

1. ลูกบาศก์ลูกหนึ่งมีปริมาตร 17,576 ลบ.ซม. จงหาระยะจากจุดตัดของเส้นทแยงมุมของหน้าใดหน้าหนึ่งไปยังจุดมุมของลูกบาศก์

2. จงหาจำนวนเต็มบวกในตำแหน่งที่ 1 ล้าน ของลำดับต่อไปนี้

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ...

โดยที่ลำดับจะมีจำนวนเต็มบวก n เกิดขึ้น n ตำแหน่ง

3. บทนิยาม $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

ถ้า $a \in A$ และ $b \in B$ จงพิสูจน์ว่า $(a, b) \in P(P(A \cup B))$



ข้อสอบแข่งขัน คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี 2534
วิชาคณิตศาสตร์

สอบวันที่ 4 สิงหาคม 2534

เวลา 9.00 – 12.00 น.

แบบทดสอบฉบับที่ 1 เป็นแบบปรนัยใช้เวลาทำ 2 ชั่วโมง

ตอนที่ 1 ข้อสอบแบบเลือกตอบ 25 ข้อ ๆ ละ 2 คะแนน

1. กำหนด A, B และ C เป็นเซตจำกัดใด ๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $A \cap B \cap C = \emptyset$ จะได้ว่า จำนวนสมาชิกของ $P(A \cup B \cup C)$ เท่ากับ 2^k เมื่อ $k =$ ผลรวมของจำนวนสมาชิกของ A, B และ C

(2) จำนวนสมาชิกของ $(A \cap B) \cup C$ น้อยกว่าจำนวนสมาชิกของ $A \cup B \cup C$

(3) $\{A \cap B \cap C\} \in P(P(A))$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) – (3) ถูกต้องเพียงข้อเดียว

ข. ข้อ (1) – (3) ถูกต้องเพียง 2 ข้อ

ค. ข้อ (1) – (3) ถูกต้องทั้ง 3 ข้อ

ง. ข้อ (1) – (3) ผิดทุกข้อ

2. ให้ I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก สำหรับ $n \in I^+$ ให้ D_n แทนช่วงเปิดโดยที่ $D_n = (0, \frac{1}{n})$

ถ้า $s < t$ แล้ว $D_s \cup D_t$ เท่ากับข้อใด

ก. $D_s \cap D_t$

ข. D_s

ค. D_t

ง. D_t'

3. บทนิยาม กำหนดให้ A และ B ต่างก็เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ E ให้

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $(A \Delta B)' = (A \cap B) \cup (A' \cap B')$

(2) $(A \Delta B)' = (A' \cup B) \cap (A \cup B')$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) ถูกต้องเพียงข้อเดียว

ข. ข้อ (2) ถูกต้องเพียงข้อเดียว

ค. ทั้งข้อ (1) และ ข้อ (2) ถูกต้องทั้ง 2 ข้อ

ง. ข้อ (1) และ ข้อ (2) ผิดทั้ง 2 ข้อ

4. กำหนดให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1\}$, $B = \{5\}$ และ $A \subset X \subset S$, $B \subset Y \subset S$

จงหาว่า $X \cup Y$ มีทั้งหมดกี่เซตที่แตกต่างกัน

ก. 8

ข. 16

ค. 32

ง. 64



18. สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ ให้ $f(x) = x + |x|$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

ก. มีช่วง $J \subset \mathbb{R}$ ซึ่งถ้า $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ แล้ว $f(x_1) = f(x_2)$

ข. มีช่วง $I \subset \mathbb{R}$ ซึ่งถ้า $x_1, x_2 \in I$ และ $x_1 \neq x_2$ แล้ว $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 2$

ค. $R_f \subset [0, \infty)$

ง. $D_f - R_f = (-\infty, 0]$

19. กำหนดให้ $f(x) = x|x|$ แล้ว $f^{-1}(x)$ คือข้อใด

ก. $|x|\sqrt{x}$

ข. $\frac{|x|\sqrt{|x|}}{x}$

ค. $\frac{1}{x|x|}$

ง. ข้อ ก. - ค. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

20. ให้ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ค่าในข้อใดต่อไปนี้ มีค่ามากที่สุด

ก. ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $g(x) = f(x) + |f(x)|$

ข. ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $h(x) = 2f(x)$

ค. ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $k(x) = f(x) - |f(x)|$

ง. ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $p(x) = 1 - f(x)$

21. บทนิยาม ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่มีคาบก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก p ซึ่ง $f(x + p) = f(x)$ ทุก x ใน D_f และจำนวนจริงบวก p ที่น้อยที่สุด ซึ่งมีสมบัติข้างต้น เรียกว่า คาบของ f

ถ้า $f_1(x) = 3x - \pi$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \frac{1}{2}x$ และ $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ มีคาบเท่ากับ m แล้ว m อยู่ในข้อใดต่อไปนี้

ก. $[0, \frac{\pi}{3}]$

ข. $[\frac{\pi}{3}, \pi]$

ค. $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$

ง. $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

22. จงหาค่าแห่งของจำนวนจริง θ บนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่ง $\sin^4\theta - \cos^4\theta = 1$

ก. อยู่บนเส้นตรง $y = x$

ข. อยู่บนแกน X

ค. อยู่บนแกน Y

ง. อยู่บนกราฟของพาราโบลา $y^2 = x$



23. สามเหลี่ยม ABC มี a, b, c เป็นด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ และวงกลมที่ล้อมรอบ มีรัศมี

R จงเขียน $\frac{a+b+c}{2R}$ ในรูปของมุม A และ B

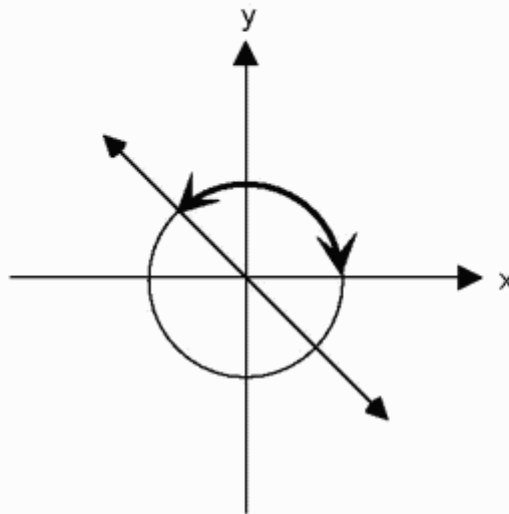
ก. $\frac{a+b+c}{2R} = \sin A + \sin B + \sin(A+B)$

ข. $\frac{a+b+c}{2R} = \frac{\sin A \sin B \sin(A+B)}{\sin A + \sin B + \sin(A+B)}$

ค. $\frac{a+b+c}{2R} = \frac{\sin A + \sin B - \sin(A+B)}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2(A+B)}$

ง. $\frac{a+b+c}{2R} = \frac{\sin A + \sin B + \sin(A+B)}{2\sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2(A+B)}}$

24. จากรูป วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) ตัดแกน x ที่จุด $(\sqrt{2}, 0)$ ส่วนโค้งของวงกลมที่มีจุด $(\sqrt{2}, 0)$ และจุดตัดของกราฟของเส้นตรง $y = -x$ กับวงกลมในควอดรันต์ที่ 2 เป็นจุดปลายยาว θ หน่วย



จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\cos \theta$ เป็นจำนวนจริงบวก

(2) $\tan \theta$ เป็นจำนวนจริงลบ

(3) $\sin \theta$ เป็นจำนวนจริงลบ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) เป็นจริงเพียงข้อเดียว

ข. ข้อ (2) เป็นจริงเพียงข้อเดียว

ค. ข้อ (3) เป็นจริงเพียงข้อเดียว

ง. ข้อ (1) - (3) เป็นเท็จทั้งสามข้อ



25. บทนิยาม ถ้า r และ s เป็นความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลม และ วงรีตามลำดับ วงกลม r เป็นวงกลมแนบในวงรี s ก็ต่อเมื่อ $D_r \subset D_s$ และ $R_r \subset R_s$ และ $n(r \cap s) = 2$ (เมื่อ $n(r \cap s)$ หมายถึงจำนวนสมาชิกของ $r \cap s$)

ถ้าวงกลมที่ใหญ่ที่สุดที่แนบในวงรีซึ่งมีสมการ $121x^2 + 256y^2 - 242x + 512y - 107 = 0$ มีเส้นรอบวงยาว θ หน่วย แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $\tan(-\theta) = -1$

ข. $\cos(-\theta) = -\sin(-\theta)$

ค. $\cos \theta = \sin(-\theta)$

ง. $\tan(-\theta) = -\sqrt{2} \sin \theta$

**ตอนที่ 2 ข้อสอบแบบเติมคำ 10 ข้อ ๗ ละ 2 คะแนน**

- ถ้า $\sqrt{2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2 - 1}} = |ax + \sqrt{x^2 - 1}|$ แล้ว \sqrt{a} เท่ากับเท่าไร
- ให้ด้านของกล่องทรงสี่เหลี่ยมยาว a, b และ c หน่วย ถ้า a, b และ c เป็นคำตอบของสมการ $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ แล้วพื้นที่ผิวด้านนอกของกล่อง (รวมฝาปิด) เท่ากับกี่ตารางหน่วย เมื่อทุกหน้าของกล่องเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
- ให้ x เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ $3^x + 3^{-x} = 2\sqrt{5}$ ค่าของ $3^x - 3^{-x}$ เท่ากับเท่าไร
- นำเชือกยาว 18 หน่วย มาขดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีเส้นทแยงมุมสั้นกว่า $\sqrt{53}$ หน่วย ให้ A แทนเซตของความยาวของด้านที่สั้นกว่าของรูปสี่เหลี่ยม จงเขียน A ในรูปช่วง
- ถ้าส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลาย คือ $(0, 0)$ และ $(3, \sqrt{7})$ ทำมุม θ กับแกน x ทางบวก แล้ว $\sin 2\theta - \cos 2\theta$ มีค่าเท่ากับเท่าไร
- จงหาสมการเส้นตรงซึ่งมีความชัน $\frac{3}{2}$ และ สัมผัสพาราโบลา $y = 3x^2 - 2x + 1$
(ตอบในรูป $ax + by + c = 0$)
- ถ้าไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และจุดโฟกัสจุดหนึ่ง คือ $(8, 8)$ และ มีความยาวของแกนตามขวางเท่ากับความยาวของแกนตั้งยุค จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา
- ถ้า $f(x) = |\sin x| - \sin x$ และ $B = \{x \in [0, 4\pi] \mid f(x) = -f(x)\}$
จงเขียน B ในรูปช่วงหรือยูเนียนของช่วง
- จงหาเรนจ์ของฟังก์ชัน $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}\}$
(ตอบในรูปช่วงหรือยูเนียนของช่วง)
- กำหนด $A = \{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x + 12y + 6 = 0\}$
จงเขียน A แบบแจกแจงสมาชิก



แบบทดสอบฉบับที่ 2 ข้อสอบมีทั้งหมด 3 ข้อ ๆ ละ 10 คะแนน ให้แสดงวิธีทำทุกข้อ

ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

1. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีพื้นที่ 8 ตารางหน่วย มีจุด (3, 4) เป็นจุดมุมของฉาก และจุด (1, 2) เป็นจุดมุมจุดหนึ่ง จงหาพิกัดของจุดมุมที่เหลือ
2. ให้ $U = \{f : I \rightarrow I \mid f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ ทุก } x, y \in I\}$
และ $A = \{f \in U \mid |f(1000)| \leq 3999\}$
จงหาว่า A มีสมาชิกกี่ตัว อะไรบ้าง จงระบุมาให้ครบถ้วน
3. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $ab = 1$ จงพิสูจน์ว่า $a + b \geq 2$



ข้อสอบแข่งขัน คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี 2535
วิชาคณิตศาสตร์

สอบวันที่ 2 สิงหาคม 2535

เวลา 9.00 – 12.00 น.

แบบทดสอบประกอบด้วย 2 ฉบับ

ฉบับที่ 1 ตอนที่ 1 เป็นปรนัยใช้เวลาทำ 1 ชั่วโมง 45 นาที

(ตอบถูก ได้ข้อละ 2 คะแนน ตอบผิดถูกหักออกข้อละ 1/2 คะแนน ไม่ตอบได้ 0 คะแนน)

- วงกลมวงหนึ่งผ่านจุด $(1, 4)$ และ $(-2, 3)$ และมีจุดศูนย์กลาง (h, k) อยู่บนเส้นตรง $x - 2y = 6$ แล้ว $h + k$ มีค่าเท่าใด
ก. $\frac{26}{7}$ ข. $\frac{16}{7}$ ค. $-\frac{6}{7}$ ง. $-\frac{10}{7}$
- กำหนดให้ $x + y < \frac{1}{2}$ และ $x^2 + y^2 < 2$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก
ก. $-\sqrt{2} < x < \frac{1}{4}(1 + \sqrt{15})$ ข. $-1 < x < \frac{1}{4}(1 - \sqrt{15})$
ค. $\frac{1}{4}(1 - \sqrt{15}) < x < \frac{1}{4}(1 + \sqrt{15})$ ง. $0 < x < \frac{1}{4}(1 + \sqrt{15})$
- กำหนดให้ Q เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ และ $S = \{x \in Q \mid 4x^4 - 16x^3 - 5x^2 + 36x - 9 = 0\}$ ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดของ S มีค่าเท่าใด
ก. $-\frac{9}{4}$ ข. -9 ค. $\frac{9}{4}$ ง. 9
- มีจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 1000 อยู่ทั้งหมดกี่จำนวน ซึ่งขึ้นต้นและลงท้ายด้วยจำนวนเฉพาะ
ก. 36 ข. 80 ค. 160 ง. 180
- บทนิยาม จำนวนเต็มบวก n จะเรียกว่า จำนวนสามเหลี่ยม ก็ต่อเมื่อ n อยู่ในรูป $1 + 2 + 3 + \dots + k$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k
ข้อใดต่อไปนี้ถูก
ก. ถ้า n_1 และ n_2 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว $n_1 + n_2$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม
ข. ถ้า n_1 และ n_2 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว $n_1 n_2$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม
ค. ถ้า n เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว $9n + 1$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม
ง. ถ้า n เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว $n + 1$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม



10. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม โดยที่ $\hat{B} = \frac{\pi}{2} + \hat{A}$ และ $BC = x, AC = y$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข
 $x^y = y^x$ และ $y = x^2$

แล้ว $\tan \hat{A}$ มีค่าเท่าใด

- ก. 1 ข. $\frac{1}{2}$ ค. $\frac{1}{3}$ ง. $\frac{1}{4}$

11. กำหนดให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และ

ให้ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3 = (4^x + 2^x - 6)^3\}$

ผลรวมของสมาชิกทั้งหมดของ S มีค่าเท่าใด

- ก. $\frac{3}{2}$ ข. $\frac{5}{2}$ ค. 3 ง. $\frac{7}{2}$

12. กำหนดให้ $\sin^{-1} x = 2 \cdot \cos^{-1} x$ และ $2x = \tan y$ เมื่อ $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- ก. $2x - y > 1$ ข. $2x + 3y < 1$ ค. $x - 3y > -1$ ง. $2x - 3y < -1$

13. ถ้า $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$ สำหรับจำนวนจริง $x \neq 0, 1$ และ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $f(\sec^2 \theta)$ มีค่าเท่าใด

- ก. $\sin^2 \theta$ ข. $\cos^2 \theta$ ค. $\tan^2 \theta$ ง. $\cot^2 \theta$



14. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ถ้า $[(A^{-1}B)C(B^tA)]^t = (\det 2A)I$ แล้ว C^{-1} คือเมตริกซ์ในข้อใด

ก. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -5 \\ 2 & & \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 8 & 8 \\ 1 & 9 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \\ 3 & 4 & 10 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & & \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 8 & 8 \\ 1 & 9 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \\ 3 & 4 & 10 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

15. ถ้า x, y เป็นจำนวนจริง ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $x > y$

(2) $xy = 490$

(3) $(\log x - \log 7)(\log y - \log 7) = -\frac{15}{4}$

แล้ว x จะอยู่ในช่วงใด

ก. (1, 10]

ข. (11, 100]

ค. (101, 1000]

ง. (1001, 10000]



16. กำหนดให้ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด และ ให้

$$A = \{n \in I^+ \mid \text{ทุก } x, y \text{ จำนวนเต็ม ถ้า } n \mid x + y \text{ และ } n \mid x - y \text{ แล้ว } n \mid x \text{ และ } n \mid y\}$$

(หมายเหตุ $a \mid b$ หมายความว่า a หาร b ลงตัว)

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

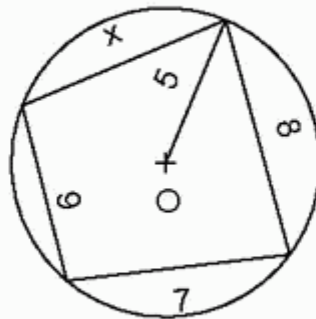
ก. $A =$ เซตของจำนวนคู่บวกทั้งหมด

ข. $A =$ เซตของจำนวนเฉพาะทั้งหมด

ค. $A =$ เซตของจำนวนคี่บวกทั้งหมด

ง. ไม่ถูกทั้ง ก. ข. และ ค.

17. ถ้า O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมดังรูป x จะมีค่าเท่าใด



ก. 7

ข. 8

ค. 9

ง. 10

18. กำหนดให้ P เป็นจุดภายนอกวงกลม \overline{PQ} และ \overline{PR} เป็นเส้นสัมผัสวงกลม A, B เป็นจุดบน \overline{PQ} และ \overline{PR} ตามลำดับ ที่ทำให้ \overline{AB} สัมผัสวงกลมที่ S ถ้ารัศมีของวงกลมยาว 5 ซม. และ ระยะห่าง (ระยะที่ใกล้ที่สุด) ระหว่างจุด P และ วงกลมเป็น 8 ซม. แล้วเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม APB มีความยาวเท่าใด

ก. 23 ซม.

ข. 24 ซม.

ค. 25 ซม.

ง. มีค่าไม่แน่นอนแล้วแต่ตำแหน่งของจุด

19. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมป้านใด ๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ผลรวมของความยาวของเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสามไปยังด้านตรงข้าม มากกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม

(2) ผลรวมของความยาวของเส้นตั้งฉากจากจุดยอดทั้งสามไปยังด้านตรงข้าม มากกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. ข้อ 1. และ ข้อ 2. เป็นจริง

ข. ข้อ 1. เป็นจริง แต่ ข้อ 2. เป็นเท็จ

ค. ข้อ 1. เป็นเท็จ แต่ ข้อ 2. เป็นจริง

ง. ข้อ 1 เป็นเท็จ และ ข้อ 2. เป็นเท็จ



20. บทนิยาม ให้ L เป็นเส้นตรง และ R^2 เป็นเซตของจุดทั้งหมดในระนาบ

กำหนดให้ $f_L : R^2 \rightarrow R^2$ โดยที่

$$f_L(A) = \begin{cases} A & \text{เมื่อ } A \text{ เป็นจุดที่อยู่บน } L \\ B & \text{เมื่อ } B \text{ เป็นจุดซึ่ง } L \text{ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด } A \text{ และ จุด } B \end{cases}$$

สมมติว่า เส้นตรง L_1 ขนานกับเส้นตรง L_2 และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับ L_1 มีทิศทางจาก L_1 ไปยัง L_2 และมีขนาดเท่ากับ ระยะระหว่างเส้นตรง L_1 กับ L_2 ถ้า $f_{L_2} \circ f_{L_1}(P) = Q$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. $\vec{PQ} = \vec{v}$

ข. $\vec{PQ} = -\vec{v}$

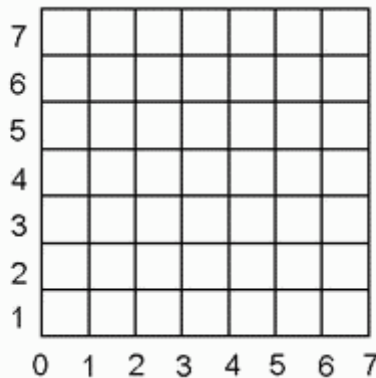
ค. $\vec{PQ} = 2\vec{v}$

ง. $\vec{PQ} = -2\vec{v}$



ตอนที่ 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ 10 ข้อ ๆ ละ 3 คะแนน

- $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 179^\circ$ มีค่าเท่าใด (ตอบในรูปเลขทศนิยม)
- กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ A(6, 6), B(8, -2), C(2, 1), E เป็นจุดอยู่บนด้าน AB โดยที่ $AE = 2EB$ และ F เป็นจุดอยู่บนด้าน AC โดยที่ $AF = \frac{1}{2}FC$ ถ้า P(a, b) เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน EF แล้ว $a + 2b$ มีค่าเท่าใด
- วงกลมซึ่งผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา $x^2 = 2y - 1$ และ โฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลา $7x^2 - 2y^2 = 14$ มีรัศมียาวเท่าใด
- กำหนดให้ (a_1, a_2) และ (b_1, b_2) โดยที่ $a_2 > 0$ และ $b_2 > 0$ เป็นพิกัดของจุด A และ B ตามลำดับ จงหาพิกัดของจุด P บนแกน X ที่ทำให้ $PA + PB$ มีค่าน้อยที่สุด
- กำหนดให้ $A = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งสอดคล้องสมการ } 2^{3x} + 2^{4y} = 2^{5z} \}$ จงหาสมาชิกของ A ซึ่งมีพิกัดที่ 3 (ค่าของ z) น้อยที่สุด
- มีจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 1000 รวมทั้งสิ้นกี่จำนวนซึ่งเมื่อหารด้วย 6 แล้วเหลือเศษ 2 และเมื่อหารด้วย 14 แล้วเหลือเศษ 10
- สี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมดในรูปนี้มีจำนวนเท่าใด



- กำหนดให้ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด และ $f, g : I^+ \rightarrow I^+$ มีสมบัติต่อไปนี้
 - $f(n) = g(g(n)) + 1$
 - $f(1) < f(2) < f(3) < \dots < f(n) < \dots$ และ $g(1) < g(2) < g(3) < \dots < g(n) < \dots$
 - $I^+ = \{ f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots \} \cup \{ g(1), g(2), g(3), \dots, g(n), \dots \}$
 จงหาค่า $f(2)$



9. กำหนดให้ ตัวอักษรภาษาอังกฤษแต่ละตัวแทนจำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 9

$$\begin{array}{r}
 \text{S E N D} \\
 \text{M O R E}^+ \\
 \hline
 \text{M O N E Y}
 \end{array}$$

โดยที่ตัวอักษรที่ต่างกันแทนจำนวนที่ต่างกัน แล้ว S, E, N, D, M, O, R และ Y แต่ละตัวมีค่าเป็นเท่าใด

10. โรงงานแห่งหนึ่งต้องการผลิตสินค้า 2 ชนิด จากวัตถุดิบ 3 ประเภท โดยมีข้อมูลเกี่ยวกับปริมาณวัตถุดิบแต่ละประเภท ที่ต้องใช้ในการผลิตแต่ละชิ้นของสินค้าแต่ละชนิด ตามตารางต่อไปนี้

วัตถุดิบประเภท	ปริมาณวัตถุดิบที่ต้องใช้ในการผลิตแต่ละชิ้นของ	
	สินค้าชนิดที่ 1	สินค้าชนิดที่ 2
A	2	1
B	1	1
C	1	0

ถ้าโรงงานนี้มีวัตถุดิบประเภท A, B, C อยู่เป็นปริมาณทั้งหมด 15, 12, 5 หน่วยตามลำดับ และราคาขายต่อชิ้นของสินค้าชนิดที่ 1 , ชนิดที่ 2 คือ 1.50 บาท และ 1 บาท ตามลำดับ ดังนั้นเพื่อให้ได้รายได้มากที่สุดจากการขายสินค้าทั้งสองชนิด

- ก. โรงงานควรผลิตสินค้าชนิดที่ 1 จำนวนเท่าใด และ ชนิดที่ 2 จำนวนเท่าใด
- ข. ภายหลังจากผลิตจะมีวัตถุดิบเหลืออยู่ทั้งหมดเท่าใด



ฉบับที่ 2 เป็นแบบอัดนัย ใช้เวลาทำ 1 ชั่วโมง 15 นาที ข้อสอบ 3 ข้อ ๆ ละ 10 คะแนน
จงแสดงวิธีทำทุกข้อ

1. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง โดยที่ a, b, c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a < \frac{b+c}{2}$ แล้ว $A < \frac{B+C}{2}$

2. นิยาม สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

สัญลัษณ์ $[x]$ หมายถึง จำนวนเต็มที่ยังมากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x เช่น $[2.1] = 2$, $[2.96] = 2$

สมมติว่า a เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องสมการ $[a + \frac{29}{100}] + [a + \frac{30}{100}] + \dots + [a + \frac{92}{100}] = 600$

ก. จงหาค่า $[a]$

ข. จงหาจำนวนเต็ม k, $29 \leq k \leq 92$ ที่มากที่สุดที่ $[a + \frac{k}{100}] = [a]$

ค. จงหาค่า $[100a]$

3. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2535}$ เป็นจำนวนจริงซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

$$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \text{ ทุกจำนวนเต็ม } n \geq 2$$

จงพิสูจน์ว่า $71 < a_{2535} < 88$



ข้อสอบแข่งขัน คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี 2536
 วิชาคณิตศาสตร์ (สอบแข่งขันรอบที่ 3)
 สอบวันที่ 7 สิงหาคม 2536 เวลา 9.00 – 12.00 น.

แบบทดสอบฉบับที่ 1 มีข้อสอบทั้งหมด 12 ข้อ

ข้อละ 5 คะแนน รวม 60 คะแนน ให้แสดงวิธีทำทุกข้อ

1. กำหนดให้ $A = I^+ \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ และ ให้ $f: A \rightarrow A$ มีสมบัติต่อไปนี้

ก. $f(1) > 0$

ข. $f(m^2 + n^2) = (f(m))^2 + (f(n))^2$ ทุก ๆ $m, n \in A$

จงหาค่า $f(3)$

2. จงหาคำตอบ x ทั้งหมดของสมการ $\sin(\ln x) + \sin(\ln x^2) + \sin(\ln x^3) = 0$

3. สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ให้ $F_n = 2^{2^n} + 1$

จงแสดงว่า ถ้า $m > n$ แล้ว F_m หาร $F_n - 2$ ลงตัว

4. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง ถ้า x, y, z เป็นจำนวน 3 จำนวนที่ต่างกันทั้งหมด และสอดคล้องสมการต่อไปนี้

$$y^3 + z^3 + a(y^2 + z^2) = z^3 + x^3 + a(z^2 + x^2) = x^3 + y^3 + a(x^2 + y^2)$$

จงแสดงว่า $x + y + z + a = 0$

5. กำหนดให้ $A_1 = \{1\}$

$$A_2 = \{3, 5, 7\}$$

$$A_3 = \{9, 11, 13, 15, 17\}$$

และสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ให้ A_n เป็นเซตของจำนวนคี่ $2n-1$ จำนวน ซึ่งเรียงต่อจากจำนวนที่ใหญ่ที่สุดของ A_{n-1}

จงหาจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง $2 \cdot 10^6 + 1 \in A_m$

6. กำหนดให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จงแสดงว่าไม่มีพหุนาม $f(x)$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และสอดคล้อง $f(1) = p, f(p) = p+1, f(p+1) = p+3$

7. ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้มี x เป็นคำตอบของสมการ

$$(\sin^{-1} x)^3 + (\cos^{-1} x)^3 = a$$

แล้ว จงแสดงว่า $\frac{\pi^3}{32} \leq a \leq \frac{7\pi^3}{8}$

8. จงหาจำนวนคำตอบทั้งหมดของสมการ $x = 100(|\sin(x-5)| + \frac{1}{20})$

9. จงหาจำนวนเต็มที่เรียงกัน 11 จำนวน ที่ผลบวกของกำลังสองของทุกจำนวน สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ m^2 โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม

10. กำหนดให้ $|x| < 1, |y| < 1, |z| < 1$ จงแสดงว่า $\frac{|x+y+z+xyz|}{|1+xy+yz+zx|} < 1$

11. จงแก้สมการ $\log_{x+\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} x$



12. ในสามเหลี่ยม ABC ความยาวของด้านทั้งสามสัมพันธ์กันดังนี้
 $|\overline{BC}|^2 + |\overline{AC}|^2 = t|\overline{AB}|^2$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริง
จงหาค่าของ t ที่ทำให้เส้นมัธยฐาน \overline{AM} ตั้งฉากกับเส้นมัธยฐาน \overline{BN}

**แบบทดสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิก ฉบับที่ 2****สอบวันที่ 7 สิงหาคม 2536****เวลา 9.00 – 12.00 น.****แบบทดสอบฉบับที่ 2 มีข้อสอบทั้งหมด 4 ข้อ****ข้อละ 10 คะแนน รวม 40 คะแนน ให้แสดงวิธีทำทุกข้อ**

- กำหนดให้ P เป็นจุดภายในสามเหลี่ยม ABC ที่ทำให้พื้นที่ของสามเหลี่ยม PAB เท่ากับพื้นที่ของสามเหลี่ยม PAC ถ้าวลาก \overline{AP} ไปพบ \overline{BC} ที่จุด D จงพิสูจน์ว่า D เป็นจุดกึ่งกลางของ \overline{BC}
- กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มี $\hat{ACB} = \frac{\pi}{8}$, $|\overline{BC}| = 5$ และให้ D เป็นจุดบน \overline{AC} , E เป็นจุดบน \overline{BC} ที่ทำให้ $\hat{EDC} = \frac{\pi}{4}$, $|\overline{EC}| = \frac{10}{3}$ และ $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DE}|} = \frac{9}{8}$ จงพิสูจน์ว่า พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับ $\frac{25(3\sqrt{2}-1)}{16}$
- กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก
จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง $m^2 = \underbrace{44\dots4}_{n \text{ ตัว}} \underbrace{888\dots8}_{n-1 \text{ ตัว}} 89$
- จงหาฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้
 - มี $(x-1)^{10}$ เป็นตัวประกอบ
 - มีสัมประสิทธิ์เป็น 1 หรือ 0 หรือ -1 เท่านั้น
 - มีกำลังไม่เกิน 2^{10}



7. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1. มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ และ $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{f(x)}}$

2. มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ และ $(f \circ f)(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{f(x)}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ 1. และ ข้อ 2. ถูกทั้ง 2 ข้อ

ข. ข้อ 1. ถูก แต่ ข้อ 2. ผิด

ค. ข้อ 1. ผิด แต่ ข้อ 2. ถูก

ง. ข้อ 1. และ ข้อ 2. ผิดทั้งสองข้อ

8. ให้ $x \in \mathbb{R}^+$ และ $(x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2} = 7$ แล้วค่าของ

$$x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 + \frac{1}{(x+1)^5}$$

เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1401

ข. 1400

ค. 321

ง. 123

9. $\tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $-\frac{\pi}{4}$

ข. $-\frac{3\pi}{4}$

ค. $\frac{\pi}{4}$

ง. $\frac{3\pi}{4}$

10. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$x^2 \log_5(x^2 + 2x - 3) - x \log_{\frac{1}{5}}(x^2 + 2x - 3) = x^2 + x$$

ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกของ A มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 2

ข. 4

ค. 6

ง. 8

11. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\frac{\sqrt{x+48} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+48} - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x-4} + \sqrt{3}}{\sqrt{x-4} - \sqrt{3}}$

ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกของ A มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 7

ข. 16

ค. 25

ง. 41

12. ถ้า $A \cdot 2^{3 \log_2 6} = 648$ แล้วค่าของ $\frac{2^{3 \log_2 6}}{A}$ ตรงกับข้อใด

ก. 2

ข. 36

ค. 72

ง. 216

13. ถ้า $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$, $x \in \mathbb{R}$ แล้ว a จะมีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้ เมื่อ $f(a) = 1$

ก. $\frac{101}{20}$

ข. $\frac{99}{20}$

ค. 1

ง. 0

14. ค่าของ $(2 - \frac{1}{2+1})(2 - \frac{1}{2^2+1})(2 - \frac{1}{2^3+1}) \dots (2 - \frac{1}{2^8+1})$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{511}{3}$

ข. 171

ค. 256

ง. $\frac{257}{3}$

15. กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3^{x-6} = 2^{x-3} \cdot 3^{-x}\}$ A เป็นสับเซตของเซตคำตอบของสมการในข้อใดต่อไปนี้

ก. $\log(x-2) < 0$

ข. $\log(x+2) < -1$

ค. $\log(x-1) < 0$

ง. $\log(x+1) < 1$



16. ถ้า $f(x) = x+2$ และ $(f^{-1} \circ g)(x) = 3x^2 - 5$ แล้วเซตคำตอบของสมการ $g(x) < 0$ คือข้อใด
 ก. $[-1,1]$ ข. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
 ค. $(-1,1)$ ง. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
17. กำหนดให้ $\overline{OA} = 3i + 4j$, $\overline{OB} = 12i + j$ ลาก AC ตั้งฉากกับ \overline{OB} ที่จุด C แล้ว \overline{OC} คือเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้
 ก. $\frac{8}{29}(12i + j)$ ข. $\frac{29}{8}(12i + j)$
 ค. $\frac{40}{147}(12i + j)$ ง. $\frac{140}{47}(12i + j)$
18. ให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3 = 7x + 3\sqrt{2x^2 - 7x + 7}\}$ ผลบวกของสมาชิกในเซต A ตรงกับข้อใด
 ก. $\frac{1}{2}$ ข. $\frac{17}{2}$ ค. $\frac{7}{2}$ ง. $\frac{19}{2}$
19. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งที่มีสมบัติว่า $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$ แล้ว $\cos C$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้
 ก. $\frac{3}{4}$ ข. $\frac{1}{4}$ ค. $-\frac{1}{4}$ ง. $-\frac{3}{4}$
20. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > b$ และ $\sqrt{11 + \sqrt{45} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ แล้ว $2a^2 + b$ มีค่าตรงกับข้อใด
 ก. 12 ข. 14 ค. 52 ง. 54
21. ในสามเหลี่ยม ABC ถ้า $(a-b+c)(a+b+c) = ac$ แล้ว ขนาดของมุม B ตรงกับค่าในข้อใด
 ก. 30° ข. 60° ค. 120° ง. 150°
22. ให้ $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\} \right\}$ และ $X = \{A \in M \mid \det A \neq 0\}$
 จำนวนสมาชิกในเซต X ทั้งหมดมีค่าเท่าใด
 ก. 64 ข. 57 ค. 48 ง. 16
23. ให้ $U = \{1, 2, 3, \dots, 65\}$ และ $X = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.ของ } (x, 65) = 1\}$
 ผลบวกของสมาชิกในเซต X ทั้งหมดมีค่าตรงกับข้อใด
 ก. 2145 ข. 1560 ค. 650 ง. 585
24. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ ผลบวกของเซตคำตอบของสมการ $\det(A - XI_3) = 0$ มีค่าตรงกับข้อใด
 ก. -1 ข. 3 ค. -3 ง. 5
25. ให้ $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$
 ถ้า $f(2) = f(3) = f(4) = \dots = f(n+1) = 0$ แล้ว $f(1)$ มีค่าตรงกับข้อใด
 ก. 0 ข. $(-1)^{n-1} \cdot n!$ ค. $(-1)^n \cdot n!$ ง. $n! + (-1)^n$

**ตอนที่ 2** ข้อสอบแบบเติมคำตอบ 10 ข้อ

1. จากตารางแจกแจงความถี่ของข้อมูลชุดหนึ่ง

คะแนน	ความถี่
1	5
2	n

จงหาค่าของจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดนี้เป็นจำนวนตรรกยะ

2. ให้
- $\log 2 = 0.301$

ถ้า $2^{54} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0$ เมื่อ $1 \leq a_n \leq 9$ และ

$$0 \leq a_i \leq 9, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

แล้วจงหาค่าของ $a_n + a_0$ เท่ากับเท่าไร

3. ในการเขียนจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 – 1000 จะต้องใช้ 0 ทั้งหมดกี่ตัว

4. ให้
- $f: I \rightarrow I$
- ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$(I) \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in I$$

$$(II) \quad (f \circ f)(1) \leq 100$$

จำนวนฟังก์ชัน f ที่มีสมบัติทั้งสองข้อข้างต้นจะมีทั้งหมดกี่ฟังก์ชัน

5. ให้ F เป็นจุดในระนาบที่มีพิกัดเป็น (1, -2) และ L เป็นเส้นตรงที่มีสมการ
- $x - y = 0$

ให้ A, B เป็นจุดปลายทั้งสองของ latus rectum ของพาราโบลาที่มี F เป็นจุดโฟกัส และ L เป็นไตเรกตริกซ์ พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABP จะเท่ากับกี่ตารางหน่วย เมื่อพิกัดของ P คือ (5, 5)

6. กำหนดสมการวงกลม
- $C_1: x^2 + y^2 = 25$

$$C_2: (x-4)^2 + (y-8\sqrt{3})^2 = 25$$

ให้ O_1 และ O_2 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม C_1 และ C_2 ตามลำดับ

ถ้า A, B เป็นจุดตัดของวงกลม C_1 กับ C_2 แล้วพื้นที่ของสี่เหลี่ยม O_1AO_2B มีค่ากี่ตารางหน่วย

7. กำหนดให้
- $\log 2 = 0.301$
- และ
- $\log 3 = 0.4771$
- ให้
- $X = \{n \in I \mid 5^{-10} < 3^n < 5\}$

ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกในเซต X เท่ากับเท่าไร

8. ให้
- $a = 2 \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7}$
- จงหาค่าของ
- $\frac{180}{\pi} a$

9. ให้ A คือเซตคำตอบของสมการ
- $3x^2 + 5x + 2 < 0$

$$B \text{ คือเซตคำตอบของสมการ } \frac{2x+1}{x-3} \geq 0$$

จงหา $(A \cup B)'$ ในรูปช่วง

10. ถ้าเราเขียน
- $7^{2538} = 100x + r$
- เมื่อ x และ r เป็นจำนวนเต็มบวก และ
- $r < 100$
- ค่าของ r เท่ากับเท่าไร