



ข้อสอบแข่งขัน คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี 2543

วิชาคณิตศาสตร์

(สอบแข่งขันรอบที่ 1)

สอบวันเสาร์ที่ 1 กรกฎาคม 2543

เวลา 09.00 – 12.00 น.

ตอนที่ 1 (ชนิดเลือกคำตอบ มี 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน)

1. กำหนดให้ $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ และ

$$Y = \{(A, B) \mid A, B \text{ เป็นสับเซตของ } X, A \cup B = X \text{ และ } A \cap B = \{1\}\}$$

จำนวนสมาชิกของเซต Y เป็นเท่าใด

- ก. 2^9
- ข. $2^9 \times 2^9$
- ค. 2^{10}
- ง. $2^9 \times 2^{10}$

2. จำนวนจริง $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ที่สอดคล้องสมการ $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$ มีทั้งหมดกี่จำนวน

- ก. 3
- ข. 4
- ค. 6
- ง. 7

3. กำหนดให้ $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่สำหรับจำนวนจริงบวก x ใด ๆ $x^2 f(\frac{x}{3}) + x f(-\frac{x}{3}) = x + 1$

$f(\frac{2}{3})$ มีค่าเท่าใด

- ก. $\frac{3}{10}$
- ข. $\frac{5}{10}$
- ค. $\frac{7}{10}$
- ง. $\frac{9}{10}$

4. ถ้า $x = a$ และ $y = b$ สอดคล้องสมการ $5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

แล้ว $10a - 2b$ มีค่าเท่าใด

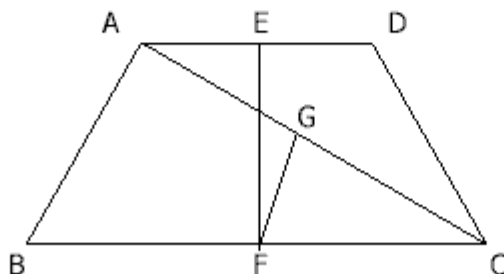
- ก. 1
- ข. 2
- ค. 3
- ง. 4

5. กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง นิเสธของประพจน์

"สำหรับจำนวนจริง a และ b ใด ๆ ซึ่งมากกว่า 5 ถ้า $0 \leq a - b < p$ ทุกจำนวนจริงบวก p แล้ว $a \geq b$ " ตรงกับข้อใด

- ก. $\exists a \leq 5 \exists b \leq 5 \exists p < 0, 0 \leq a - b < p \vee a < b$
- ข. $\exists a \leq 5 \exists b \leq 5, (\forall p < 0, 0 \leq a - b < p) \wedge a < b$
- ค. $\exists a > 5 \exists b > 5 \exists p > 0, 0 \leq a - b < p \wedge a < b$
- ง. $\exists a > 5 \exists b > 5, (\forall p > 0, 0 \leq a - b < p) \wedge a < b$

6.



จากรูป $AB = CD$, E, F และ G เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD, BC และ AC ตามลำดับ ถ้า

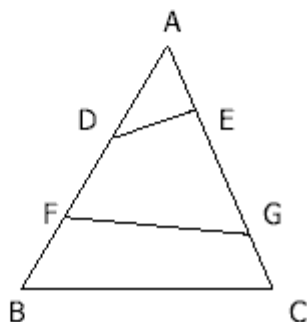
$\hat{BAC} = 88^\circ, \hat{DCA} = 42^\circ$ จะได้ \hat{EFG} มีค่าเท่าใด

- ก. 20°
- ข. 21°
- ค. 22°
- ง. 23°



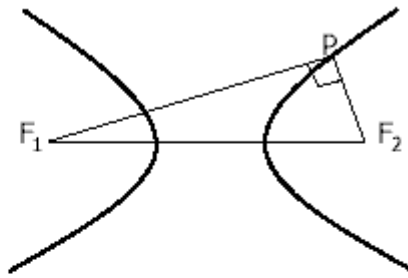
ตอนที่ 2 (ชนิดเต็มเฉพาะคำตอบ มี 25 ข้อ ข้อละ 5 คะแนน)

- กำหนดให้ $(\sum_{n=1}^{100} x^n)(\sum_{n=1}^{100} (-1)^n x^n) = \sum_{n=1}^{200} a_n x^n$ เมื่อ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{200}$ เป็นค่าคงตัว
แล้ว $\sum_{n=1}^{150} a_n$ มีค่าเท่าใด
- จำนวนจริง x ซึ่งสอดคล้องสมการ $x^3 - [x] = 3$ มีค่าเท่าใด
(สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ $[a]$ คือจำนวนเต็มที่ยกที่สุดซึ่งมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ a)
- กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ และ r เป็นความสัมพันธ์ใน A โดยที่
 $r = \{(a, b) \mid a \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ } \frac{b}{a} \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ}\}$ จำนวนสมาชิกของ r เป็นเท่าใด
- กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a^2b + ab^2 + a + b + 8ab = 83$
จะได้ $a^3 + b^3$ มีค่าเท่าใด
- กำหนดให้ $a_1 = 2, a_2 = 5$ และ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n \geq 3$
ถ้า $\sum_{k=1}^{2543} a_k = p$ เมื่อ p เป็นค่าคงตัว แล้ว a_{2545} มีค่าเท่าใดในเทอมของ p
- กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $m^2 - n^2 = 400$ และ $450 < mn < 950$
จะได้ $3m - 4n$ มีค่าเท่าใด
- ถ้า $a = \sum_{n=1}^{2000} n!$ แล้ว หลักหน่วยของ a เป็นตัวเลขใด
- กำหนดให้ abc และ cba เป็นจำนวนเต็มบวก 3 หลัก โดยที่ a, b, c เป็นเลขโดด ถ้าผลคูณของจำนวนทั้งสองมีค่าเท่ากับ 92565 แล้ว ผลบวกของจำนวนทั้งสองเป็นเท่าใด
- ผลบวกของรากทั้งหมดของสมการ $x^2 + 5x - 15 - \sqrt{9x^2 + 45x + 117} = 0$ มีค่าเท่าใด
- กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่สำหรับจำนวนจริง x และ y ใด ๆ
 $f(x+y)f(x-y) = f(x^2 - y^2) + 2(x+y)$
 $f(2543)$ มีค่าเท่าใด
- รากของสมการ $\sin 4x = 0$ ในช่วง $[70\pi, 75\pi]$ มีทั้งหมดกี่ค่า
- จากรูป ถ้า $AD = DF = FB$ และ $EG = 2AE = 2GC$ แล้ว พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม $BFGC$ เป็นกี่เท่าของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ADE





13.



จากรูป F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา ที่มีสมการเป็น $4x^2 - y^2 - 8x - 2y - 1 = 0$ และ P เป็นจุดบนไฮเพอร์โบลานี้ที่ทำให้ $\widehat{F_1PF_2} = 90^\circ$ จะได้พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม F_1PF_2 มีค่ากี่ตารางหน่วย

14. กำหนดให้ สำหรับแต่ละจำนวนจริง m

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $f_m(x) = (2m^2 + m + 3)x^2 - 3mx + 1$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

ถ้า $A = \{m \in \mathbb{R} \mid f_m(x) > 0 \text{ ทุก } x \in \mathbb{R}\}$ แล้ว A คือเซตใด (ตอบในรูปของช่วง)

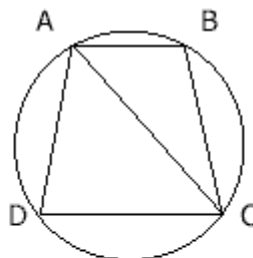
15. จำนวนจริง x ซึ่งสอดคล้องสมการ $81^x - 9^x - 4(3^x) = 4$ มีค่าเท่าใด

16. เซตคำตอบของสมการ $x^{x-2} > 1$ เมื่อ $x > 0$ คือเซตใด (ตอบในรูปของช่วง)

17. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งสอดคล้องสมการ $\frac{\ln(x-y)}{\ln x - \ln y} = e^{\ln(\sin 4x \cot 2x - \cos 4x)}$
 $x+y$ มีค่าเท่าใด

18. ถ้า $\log_{15} 5 = a$ แล้ว $\frac{(\log_9 225) \sum_{n=9}^{225} \log_{15} n}{\sum_{n=9}^{225} \log_{75} n}$ มีค่าเท่าใดในเทอมของ a

19. จากรูป ถ้า $AB = 2$ หน่วย, $AD = BC = 3$ หน่วย และ $AC = 4$ หน่วย แล้ว CD มีค่าเท่าใด

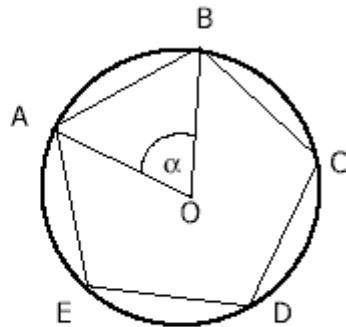


20. กำหนดให้ A และ B เป็นเมตริกซ์มิติ 3×3 และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์มิติ 3×3 โดยที่ $AB = A+B$ และ $\det(A-I) = 8$ จะได้ $\det(I-B^t)$ มีค่าเท่าใด

21. ถ้า $\sin 3A = \frac{2}{3}$ แล้ว $\sin A \sin(60^\circ - A) \sin(60^\circ + A)$ มีค่าเท่าใด



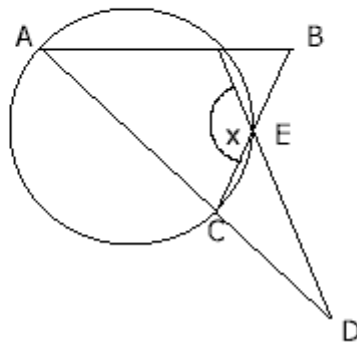
22.



จากรูป ABCDE เป็นรูปห้าเหลี่ยม แนบในวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง $AB = BC = CD = DE = 2$ หน่วย และ $AE = k$ หน่วย ถ้า $\widehat{AOB} = \alpha$ แล้ว $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ มีค่าเท่าใดในเทอมของ k

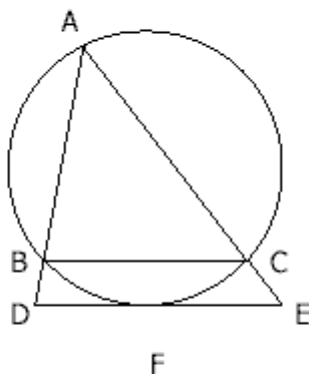
23. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งมีด้าน AD ขนานกับด้าน BC ถ้า $BC = x$ หน่วย และ $AD = y$ หน่วย , $\widehat{ADC} = 20^\circ$ และ $\widehat{BAD} = 40^\circ$ ถ้า $\sin 20^\circ = p$ แล้ว ความยาวด้าน AB มีค่าเท่าใดในเทอมของ x,y และ p

24.



จากรูป $\widehat{ABC} = 43^\circ$ และ $\widehat{EDC} = 35^\circ$ จะได้ x มีค่าเท่าใด

25.



จากรูป \overline{DE} สัมผัสวงกลมที่จุด F , $BD = 1$ หน่วย และ $DF = 2$ หน่วย $\widehat{BAC} = 72^\circ$ และ $\widehat{BCF} = 36^\circ$ ถ้า s_1 และ s_2 เป็นความยาวเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม ADE ตามลำดับ แล้ว $\frac{s_1}{s_2}$ มีค่าเท่าใด



ข้อสอบแข่งขัน คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี 2544

วิชาคณิตศาสตร์

(สอบแข่งขันรอบที่ 2)

สอบวันเสาร์ที่ 25 สิงหาคม 2544

เวลา 09.00 – 11.00 น.

ตอนที่ 1 ข้อสอบแบบเลือกคำตอบ (ข้อละ 2 คะแนน)

สัญลักษณ์ R แทนเซตของจำนวนจริง , I แทนเซตของจำนวนเต็ม

1. กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

- ก. $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
- ข. $A - C = A \cap C'$
- ค. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
- ง. $(A' \cup B' \cup C')' = A \cup B \cup C$

2. กำหนดให้ U = เซตของคนในจังหวัดนครสวรรค์

- B_1 = เซตของครูในจังหวัดนครสวรรค์
- B_2 = เซตของตำรวจในจังหวัดนครสวรรค์
- B_3 = เซตของพยาบาลในจังหวัดนครสวรรค์
- B_4 = เซตของทหารในจังหวัดนครสวรรค์

โดยที่ B_1, B_2, B_3 และ B_4 แต่ละคู่มิมีสมาชิกที่ซ้ำกัน

ข้อความในข้อใดต่อไปนี้ผิด

- ก. คนที่ไม่ใช่ครู หรือ ตำรวจ หรือ พยาบาล หรือ ทหาร คือ $B'_1 \cap B'_2 \cap B'_3 \cap B'_4$
- ข. ครู หรือ ตำรวจ หรือ พยาบาล หรือ อาชีพอื่น ๆ คือ B'_4
- ค. เซตของทหาร คือ $B'_1 \cap B'_2 \cap B'_3$
- ง. พยาบาลไม่เป็นสมาชิกใน $B'_1 \cup B'_2 \cup B'_3$

3. บทนิยาม กำหนดเซต X และ การดำเนินการ * โดยมี $e \in X$ ซึ่ง $x * e = x = e * x$ สำหรับทุกสมาชิก $x \in X$ แล้ว เรียก e ว่า สมาชิกเอกลักษณ์ของ X

ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ , A เป็นเซตใด ๆ

สมาชิกเอกลักษณ์ของ $P(A)$ และ การดำเนินการ \cup และ \cap คือข้อใด

- ก. U เป็นเอกลักษณ์ของการดำเนินการ \cup และ \emptyset เป็นเอกลักษณ์ของการดำเนินการ \cap
- ข. U เป็นเอกลักษณ์ของการดำเนินการ \cup และ A เป็นเอกลักษณ์ของการดำเนินการ \cap
- ค. \emptyset เป็นเอกลักษณ์ของการดำเนินการ \cup และ U เป็นเอกลักษณ์ของการดำเนินการ \cap
- ง. \emptyset เป็นเอกลักษณ์ของการดำเนินการ \cup และ A เป็นเอกลักษณ์ของการดำเนินการ \cap

4. ให้ a, b, c และ d เป็นสมาชิกของจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (1) ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a - c < b - d$
- (2) ถ้า $a + c > b + d$ แล้ว $a > b$ หรือ $c > d$
- (3) ถ้า $a < b$ แล้ว $a^2 < b^2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- ก. ถูกเพียงข้อเดียว
- ข. ถูกเพียง 2 ข้อ
- ค. ถูกทั้ง 3 ข้อ
- ง. ผิดทั้ง 3 ข้อ

5. ถ้า $x - c$ เป็น ห.ร.ม. ของ $x^3 + 9x^2 + 26x + 24$ และ $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ แล้วผลบวกของ c ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับข้อใด

- ก. -5
- ข. -1
- ค. 1
- ง. 5



6. เซตคำตอบของ $\frac{x}{|x+3|-1} < 5$ คือข้อใด

ก. $(-\infty, -4) \cup (-\frac{10}{3}, -3) \cup (-2, \infty)$

ข. $(-\infty, -4) \cup (-\frac{10}{3}, -3] \cup (-2, \infty)$

ค. $(-\infty, -4) \cup (-\frac{10}{3}, -\frac{5}{2}) \cup (-2, \infty)$

ง. $\mathbb{R} - \{-4, -2\}$

7. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$$B = \{(a, b) \in A \times A \mid a = b\}$$

$$C = \{(a, b) \in A \times A \mid a \geq b\}$$

จำนวนเซต D ที่เป็นไปได้ทั้งหมดซึ่งมีสมบัติว่า $B \subset D \subset C$ เท่ากับข้อใด

ก. 2^{20}

ข. 2^{35}

ค. 2^{45}

ง. 2^{55}

8. นิเสธของประพจน์ $(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \rightarrow s)$ คือประพจน์ในข้อใด

ก. $[p \rightarrow \sim (r \vee s)] \wedge [q \rightarrow \sim (r \vee s)]$

ข. $[\sim p \rightarrow (r \vee s)] \wedge [\sim q \rightarrow (r \vee s)]$

ค. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge [(p \wedge q) \rightarrow s]$

ง. $[\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim r] \wedge [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim s]$

9. กำหนด โอเปอเรชัน * และ Δ ดังตารางต่อไปนี้

p	q	$p * q$	$p \Delta q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

ประพจน์ในข้อใดเป็นสัจนิรันดร์

ก. $(p * q) \Delta p$

ข. $[(q * p) * q] \Delta p$

ค. $\sim (p \Delta q) * (q \Delta p)$

ง. $(p * q) \Delta (q * p)$

10. กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง ข้อใดเป็นเท็จ

ก. $\forall x [(|x| > 2) \vee (|x| < 3)]$

ข. $\exists x [(x^2 - x - 2 = 0) \wedge (x^2 + x - 6 = 0)]$

ค. $\exists x [x^2 - x - 1 = 0] \rightarrow \forall x [x^2 - 4x + 4 > 0]$

ง. $\exists x [x^2 - x + 1 = 0] \rightarrow \forall x [x^2 - 2x + 1 > 0]$

11. ข้อใดต่อไปนี้ มีค่าความจริงเป็นจริง

ก. $\exists x \forall y [x - y = y - x]$; $U = \mathbb{R}$

ข. $\forall x \forall y [|x + y| = |x| + |y|]$; $U = \mathbb{R}$

ค. $\forall x \exists y [(x - y)^3 = x^3 - y^3]$; $U = \mathbb{R}$

ง. $\exists y \forall x [xy = 1]$; $U = \mathbb{R}^+$



ตอนที่ 2 ข้อสอบแบบเติมเฉพาะคำตอบ (ข้อละ 3 คะแนน)

- จากการสำรวจบุคลากรในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง จำนวน 60 คน เป็นชาย 40 คน พบว่ามี

บุคลากรที่ชอบดู TV ช่อง 3 และ ช่อง 7	จำนวน 7 คน
บุคลากรชายที่ชอบดู TV ช่อง 3	จำนวน 13 คน
บุคลากรชายที่ชอบดู TV ช่อง 7	จำนวน 9 คน
บุคลากรชายที่ไม่ชอบดู TV ช่อง 3 หรือ ช่อง 7	จำนวน 21 คน
บุคลากรหญิงที่ชอบดู TV ช่อง 3	จำนวน 4 คน
บุคลากรหญิงที่ชอบดู TV ช่อง 7	จำนวน 9 คน

 จงหาจำนวนบุคลากรชายที่ชอบ ดู TV ช่อง 3 และ ช่อง 7

(note. ตัณฉบับ ใช้คำว่า บุคลากรชายที่ไม่ชอบดู TV ช่อง 3 หรือ ช่อง 7 ซึ่งจะทำให้หาคำตอบไม่ได้)

- บทนิยาม** $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$
 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid \forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}$

เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง และ \mathbb{N} เป็นเซตของจำนวนนับ

สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $A_n = (1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$

ถ้า a เป็นค่าของขอบเขตบนน้อยสุดของ $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ และ b เป็นค่าของขอบเขตบนน้อยสุดของ $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$

แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด

- ถ้า k เป็นคำตอบของสมการ $\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = 0$ แล้ว $14k + 3$ มีค่าเท่าใด
 $[(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)]$
- จงหาผลคูณของรากของระบบสมการ

$$x + y = 3383$$

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 17$$

- กำหนดให้ $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2|x| + |y| \leq 4\}$
 $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| - |y| \geq 1\}$

พื้นที่ของ $r_1 \cap r_2$ มีค่าเท่ากับกี่ตารางหน่วย

- กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2y - xy - 1 = 0\}$
 $A = \{x \in \mathbb{I} \mid |x| \leq 5\}$

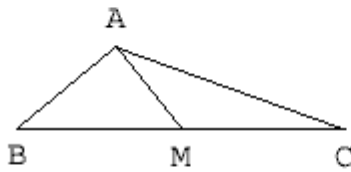
จงหาจำนวนสมาชิกในเซต $D_{r^{-1}} \cap A$

- เศษเหลือจากการหาร $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^{16}} + \frac{1}{x^{32}}$ ด้วย $x^2 - 1$ มีค่าเท่าใด

- กำหนดให้ $A = \{-3, 1, 2\}$ เป็นเซตของสัมประสิทธิ์ของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ ถ้าสัมประสิทธิ์ของทุกตัวของสมการมีค่าไม่เท่ากัน แล้ว ผลบวกของรากทั้งหมดของสมการมีค่าเท่าใด



9. จากรูป ABC เป็นสามเหลี่ยม ที่มี M เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC
 $AB = 4$ ซม. , $AC = 8$ ซม. และ $AM = 3$ ซม. จงหาความยาวของ BC



10. $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน CQ แบ่งครึ่ง AD ที่จุด M และ ไปพบส่วนของ AB ที่จุด Q , DP แบ่งครึ่ง BC ที่จุด N พบส่วนของ AB ที่จุด P , CQ และ DP ตัดกันที่จุด O พื้นที่ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ เท่ากับ k ตารางหน่วย จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม OPQ



ข้อสอบแข่งขัน คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี 2545

วิชาคณิตศาสตร์

(สอบแข่งขันรอบที่ 1)

สอบวันเสาร์ที่ 29 มิถุนายน 2545

เวลา 09.00 – 12.00 น.

ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ตอนที่ 1 (ชนิดเลือกคำตอบ มี 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน)

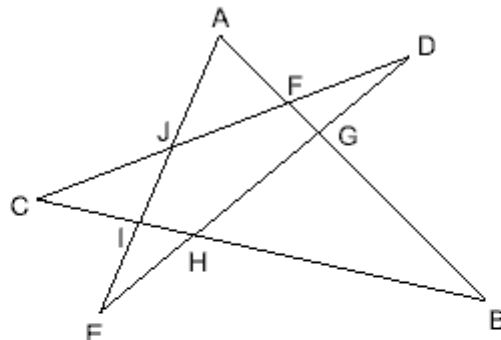
- ค่าของ $\frac{x}{y}$ เมื่อ x และ y สอดคล้องสมการ $2\log_8(3x - 2y) = \log_8 x + \log_8 y + 1$ อยู่ในช่วงใดของข้อต่อไปนี้

ก. $[0,1]$ ข. $[1,3]$ ค. $[\frac{9}{2},6]$ ง. $[\frac{13}{2},9]$
- ค่าของ x ที่สอดคล้องสมการ $x^{\log_3 x} = \frac{x^5}{729}$ อยู่ในช่วงใดของข้อต่อไปนี้

ก. $[0,4)$ ข. $[4,8)$ ค. $[8,30]$ ง. $[31,81]$
- สมการเส้นตรงซึ่งแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง ที่เชื่อมระหว่างจุด $(9, 1)$ และ $(-3, 4)$ คือข้อใดต่อไปนี้

ก. $8x + 2y - 29 = 0$ ข. $8x - 2y - 19 = 0$
ค. $6x - 2y - 13 = 0$ ง. $6x + 2y - 23 = 0$
- ค่าของ $\left(\frac{1}{\sec^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)^2 - \frac{4}{3}(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1 ข. $\frac{1}{3}$ ค. $-\frac{1}{3}$ ง. -1
- จากรูป ดาว 5 แฉก ABCDE ที่กำหนดให้ จงพิจารณาว่าข้อใดกล่าวถูกต้อง



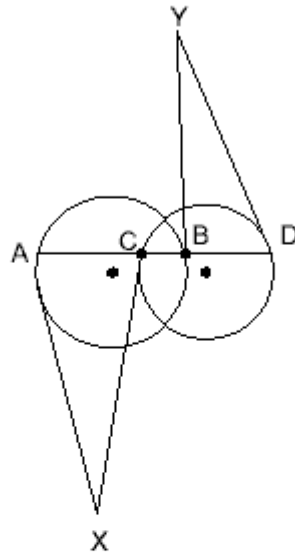
- ก. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} < 180^\circ$
 ข. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 180^\circ$
 ค. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} > 180^\circ$
 ง. รูปแน่นอนไม่ได้ เพราะข้อมูลที่ให้ไม่เพียงพอ
- ถ้า $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ และ $\beta \in (-\pi, 0)$ ซึ่งทำให้ $\sin(2\alpha + \beta) = \sin 2\alpha + \sin \beta$ แล้ว $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $2\alpha^2$ ข. $3\alpha^2$ ค. $4\alpha^2$ ง. $5\alpha^2$

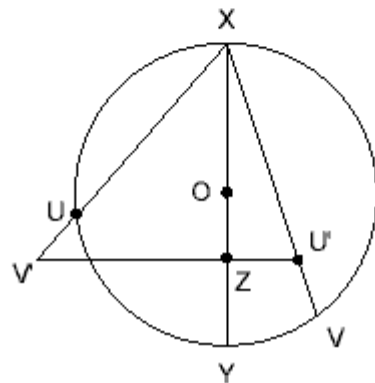


ตอนที่ 2 ชนิดเลือกคำตอบ มี 25 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน)

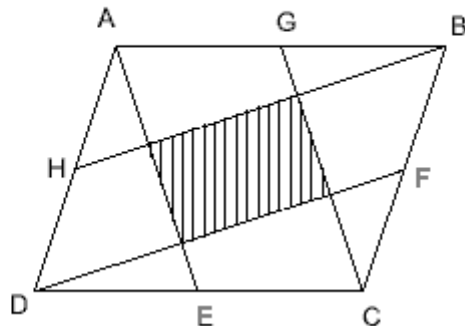
- เส้นตรงตัดวงกลมที่จุด A, B, C, D ดังรูป เส้นสัมผัส ณ จุด A และ C พบกันที่ X, เส้นสัมผัส ณ จุด B และ D พบกันที่ Y ถ้า $\hat{A}XC = 52^\circ$ จงหาว่า $\hat{B}YD$ มีค่าเท่าใด



- จากรูป XY เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง ถ้า $XU' = XU$ และ $XV' = XV$ และ $V'U'$ ตัด XY ที่จุด Z แล้วจงหาว่า \hat{XZU}' กางกี่องศา

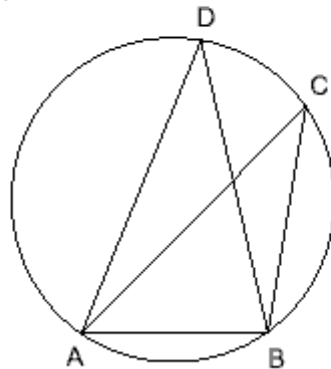


- E, E, G, H เป็นจุดกึ่งกลางของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ถ้า พื้นที่ ABCD = 150 ตารางหน่วย จงหาพื้นที่แรเงา

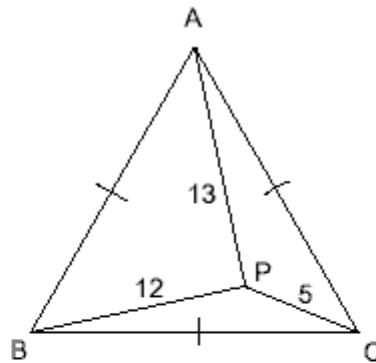




4. จากรูป จงหาค่ากำลังสองของความยาว AD ($|\overline{AD}|^2$) ในพจน์ของ α และ β ถ้ากำหนดให้ $|\overline{AB}| = \alpha$, $|\overline{BC}| = \beta$ และ มุม $ABD = 80^\circ$, มุม $CBD = 20^\circ$



5. จงหาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC ซึ่งมีจุดยอดอยู่ห่างจากจุด P เป็นระยะ 5, 12 และ 13 หน่วย ดังรูป



6. จงหาค่า k ที่ทำให้สมการพหุนาม $x^2 - (4k + 3)x + (3k^2 + 3k + 2) = 0$ มีรากจริงทั้งสองราก และผลบวกของกำลังสองของรากทั้งสองมีค่าน้อยที่สุด
7. กำหนดให้ $f: I^+ \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ นิยามโดย

$$f(n) = \begin{cases} 1 & ; n \text{ เป็นจำนวนเฉพาะคู่} \\ 0 & ; n \text{ เป็นจำนวนเฉพาะคี่} \\ -1 & ; n \text{ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ} \end{cases}$$

จงหา $f(2545) - (2546)f(2^{2545} - 1)$

8. ถ้า x, y, z เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ทำให้ $(1 + \pi^x)(1 + \pi^y)(1 + \pi^z) = 8$ แล้วจงหาเงื่อนไขของ $x + y + z$
9. ถ้า $f(x + y) - f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$ ทุก x ทุก y และ $f(0) = 0, f(1) = 1$ แล้วจงหา $f(2545)$
(แนะ : ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ n ดังนั้น $\forall n \geq 1, P(n)$ เป็นจริงก็ต่อเมื่อ $P(1)$ เป็นจริง และ สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ ถ้า $P(1), P(2), \dots, P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริงด้วย)
10. จงแก้สมการ $(\sin x + \cos x)\sqrt{2} = \tan x + \cot x$ โดยตอบในรูปทั่วไป
11. จงหาค่าสูงสุด และ ค่าต่ำสุดของ $\sin^6 x + \cos^6 x$
12. จงหาสมการของวงรี ซึ่งผ่านจุด $(3, -1)$ และมีจุดยอดทั้งสองอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลา $16x^2 - 9y^2 - 96x + 36y - 36 = 0$



13. จงหาสมการวงกลมซึ่งผ่านจุด $(-2, 4)$ และ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลา $x^2 - 4x + 12y - 44 = 0$

14. กำหนดให้ $A = \{y \in \mathbb{R} \mid \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{10}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}\}$

และ ให้ $m =$ ค่าน้อยสุดของ $\{y \in \mathbb{R} \mid y = a^x + \frac{1}{a^x} \text{ เมื่อ } a > 0 \text{ และ } x \text{ เป็นจำนวนจริงใด ๆ}\}$

ถ้า $B = \{b \in \mathbb{R} \mid b = a + m \text{ เมื่อ } a \in A\}$ แล้วจงหาเซต B

15. ถ้า $f(y) = (\log_2 y)^6 + m(\log_2 y)^3 - \log_2 y - 1, m \in \mathbb{R}$ และ $1 + \log_2 y$ ทหาร $f(y)$ เหลือเศษ 1 แล้ว จงหาผลบวกของ $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)$ กับเศษที่ $\log_2 y$ ทหาร $f(y)$

16. ให้ $f(x)$ เป็นพหุนามกำลัง 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และ $a, b, c \in \mathbb{I}$ ถ้า $f(a) = f(b) = 4$ และ $f(c) = 7$ และ ถ้า $|c - a| = 3$ แล้วจงหา $|c - b|$

17. จงหาฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมด ที่มีสมบัติว่า

$$xf(x) - f(1-x) = -1 + x^2 - x^3 \text{ ทุก } x \in \mathbb{R}$$

18. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(\text{adj}(\text{adj}A))$

19. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B, C เท่ากับ a, b, c หน่วย ตามลำดับ กำหนดให้ $abc = 1$ และ δ เท่ากับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC

$$\text{ถ้า } \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = st \text{ เมื่อ } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ แล้ว}$$

จงหาว่า t มีค่าเท่าใด โดยตอบในรูปของ s และ δ

20. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

ถ้า $a + b$ และ $a - b$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ แล้วจงหา ห.ร.ม. ของ $a + b$ และ $a - b$

21. กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $(a, b) = (c, d) = 1$

ถ้า $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ เป็นจำนวนบวก แล้วจงหาความสัมพันธ์ระหว่าง b และ d

22. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A, B, C เท่ากับ a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $b = 2c$ และ $\hat{A} < 90^\circ$ แล้วจงเขียน $\tan \frac{B-C}{2}$ ในรูปของ $\cos A$

23. ผู้แทนคณะมนุษยศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และ สังคมศาสตร์ เป็นผู้หญิง 2 คน และ ผู้ชาย 2 คน ชื่อ น.ส. สายฝน น.ส. อรพินท์ นาย ดิเรก และ นาย บันเทิง กำลังนั่งประชุมรอบโต๊ะกลม เพื่อปรึกษากันเกี่ยวกับการจัดงานกีฬาสัมพันธ์ระหว่างคณะ ถ้าทราบว่า

ก. น.ส. สายฝน และ นายดิเรก นั่งใกล้กัน

ข. นาย บันเทิงนั่งตรงข้ามกับผู้แทนคณะสังคมศาสตร์

ค. น.ส. อรพินท์ นั่งด้านขวาของผู้แทนคณะวิทยาศาสตร์

ง. ผู้หญิงนั่งด้านขวาของผู้แทนคณะมนุษยศาสตร์

จงหาว่า ใครคือผู้แทนคณะศึกษาศาสตร์ และ ใครคือผู้แทนคณะมนุษยศาสตร์



24. ถ้า $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ทุก x ทุก y ที่เป็นจำนวนจริง และ $f^{-1}(1) = -2$ จงหา $f \circ f\left(\frac{5}{7}\right)$
25. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ถ้า $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ ทำให้ $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ และ $c_{11}(B) = \frac{1}{3}$, $c_{21}(B) = 1$ เมื่อ $c_{ij}(B) =$ โคแฟกเตอร์ของ b_{ij} แล้ว จงหา B



ข้อสอบแข่งขัน คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี 2546

วิชาคณิตศาสตร์

(สอบแข่งขันรอบที่ 1)

สอบวันเสาร์ที่ 28 มิถุนายน 2546

เวลา 09.00 – 12.00 น.

ตอนที่ 1 (ชนิดเลือกตอบมี 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน)

- ถ้า $A = \{\emptyset, 1, \{3\}, \{1\}, 2, \{1, 2\}\}$ แล้ว $A \cup P(A)$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
ก. 66 ข. 67 ค. 68 ง. 69
- พิจารณาข้อความต่อไปนี้
(1) ถ้า $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ มีค่าความจริงเป็นจริงด้วย
(2) ถ้า p, q, r เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว $(p \wedge r) \rightarrow (q \rightarrow p)$ เป็นสัจนิรันดร์
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
ก. ข้อ (1) เป็นจริง แต่ ข้อ (2) เป็นเท็จ ข. ข้อ (1) เป็นเท็จ แต่ ข้อ (2) เป็นจริง
ค. ทั้งข้อ (1) และ ข้อ (2) เป็นจริง ง. ทั้งข้อ (1) และ ข้อ (2) เป็นเท็จ
- กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{1-x^4}$
ถ้า $A = \{x \mid (g \circ f)(x) = 0\}$ และ $B = \{x \mid g(x) = 0\}$ แล้ว
ความสัมพันธ์จาก A ไป B มีทั้งหมดกี่ความสัมพันธ์
ก. 2 ข. 4 ค. 8 ง. 16
- กำหนดให้ $A(4, 3)$, $B(10, -5)$, $C(3, -4)$ และ $P(u, v)$ เป็นจุดในระนาบ โดยที่ CP ตั้งฉากกับ AB ที่จุด P แล้วระยะจากจุด P ไปยังเส้นตรงซึ่งมีสมการ $3x + 4y + 8 = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
ก. $\frac{18}{5}$ ข. $\frac{21}{5}$ ค. 5 ง. 6
- ถ้าวงรีวงหนึ่งผ่านจุด $(3, 2)$ และมีจุดโฟกัสทั้งสองอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีสมการ $7x^2 - 9y^2 + 28x + 36y - 71 = 0$ แล้วสมการของวงรีนี้ คือข้อใดต่อไปนี้
ก. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$ ข. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$
ค. $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ ง. $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$
- ถ้าวงกลมวงหนึ่งผ่านจุด $(1, 3)$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลา ซึ่งมีสมการ $x^2 - 8x + 8y + 8 = 0$ แล้วสมการของวงกลมนี้ คือข้อใดต่อไปนี้
ก. $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 45$ ข. $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$
ค. $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 13$ ง. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$
- กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และ $x \neq 1$ เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\log_m x$ เป็นค่าเฉลี่ยของ $\log_n x$ กับ $\log_k x$ แล้ว $\frac{\log_k m + \log_n m}{2\log_m n - \log_k n}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
ก. 1 ข. 2 ค. 4 ง. 6

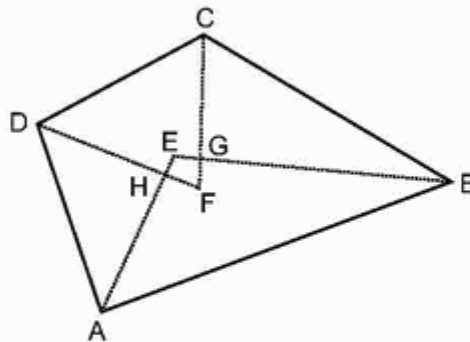


8. กำหนดให้ $R =$ เซตของจำนวนจริง ถ้า A เป็นบริเวณในระนาบ ซึ่งนิยามโดย

$$A = \{ (x, y) \in R \times R \mid |x| + |y| + |x + y| \leq 2 \}$$

แล้ว เราไม่สามารถคำนวณพื้นที่ของ A ได้จากรูปหลายเหลี่ยมในข้อใด

- ก. สามเหลี่ยมมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ 6 รูป
 - ข. สามเหลี่ยมมุมฉากที่เท่ากันทุกประการ 2 รูป กับ สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เท่ากันทุกประการ 2 รูป
 - ค. สี่เหลี่ยมด้านขนานที่เท่ากันทุกประการ 2 รูป กับ สี่เหลี่ยมจัตุรัส 1 รูป
 - ง. สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เท่ากันทุกประการ 2 รูป กับ สามเหลี่ยมหน้าจั่ว 1 รูป
9. ในรูปสี่เหลี่ยม ABCD ใด ๆ ถ้าเส้นแบ่งครึ่งมุม A, B (ที่อยู่ติดกัน) และ เส้นแบ่งครึ่งมุม C, D (ที่อยู่ติดกัน) ตัดกันที่ E และ F ตามลำดับ และ จุดตัดอีก 2 จุด ของเส้นแบ่งครึ่งเหล่านี้คือ จุด G และ H ดังรูป แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง



- ก. $\hat{AEB} + \hat{CFD} < 180^\circ$
 - ข. $\hat{AHD} + \hat{BGC} > 180^\circ$
 - ค. มีวงกลมผ่าน E, F, G, H ได้เพียงวงเดียว
 - ง. ไม่สามารถเขียนวงกลมผ่านทั้ง 4 จุด คือ E, F, G, H ได้
10. จากการสำรวจพฤติกรรมกรรมการทาน ทูเรียน มะม่วง และ มังคุด ของคน 100 คนกลุ่มหนึ่ง พบว่าทุกคนชอบทานผลไม้ทั้งสามชนิดนี้ อย่างน้อยหนึ่งอย่าง ถ้ามี 50 คนไม่ชอบทานมังคุด 30 คนชอบทานมังคุดแต่ไม่ทานทุเรียน และมี 10 คนชอบทานผลไม้ทั้งสามอย่างนี้ แล้วจำนวนคนที่ชอบทานทุเรียนและมังคุดแต่ไม่ชอบทานมะม่วงเลย เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- ก. 10 คน
 - ข. 20 คน
 - ค. 25 คน
 - ง. 35 คน

**ตอนที่ 2 (ชนิดเติมคำตอบ มี 25 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน)**

1. ถ้า $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$ แล้วจำนวนทั้งหมดของ x ที่สอดคล้องสมการ

$$\tan x = \tan(x + 10^\circ)\tan(x + 20^\circ)\tan(x + 30^\circ) \text{ มีกี่จำนวน}$$

2. จงหาคำตอบทั้งหมดของระบบสมการ

$$\sin(x + y) = 0 \text{ และ } \sin(x - y) = 0$$

เมื่อ x และ y สอดคล้องเงื่อนไข $0 \leq x \leq \pi$ และ $0 \leq y \leq \pi$

3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{bmatrix}$

ถ้า $\det A = \alpha$ และ $\det B = \beta$ และ สำหรับ $i = 1, 2, 3$

4. ถ้า $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^6 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0\}$ แล้ว $\mathbb{R} - S$ คือเซตใด

กำหนดให้ $\mathbb{R} =$ เซตของจำนวนจริง

5. ผลคูณของคำตอบของสมการ $(0.4)^{\log^2 x + 1} = (6.25)^{2 - \log x^3}$ มีค่าเท่าใด

6. ถ้าคู่อันดับ $(x, y) = (a, b)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ

$$x^{x+y} = y^{x-y} \text{ และ } x^2 y = 1$$

แล้ว จงหาคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมดที่ $a, b > 0$

7. กำหนดระบบสมการ

$$\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2$$

$$\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2$$

$$\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2$$

ถ้า $x = a, y = b$ และ $z = c$ เป็นคำตอบของระบบสมการดังกล่าว แล้ว $6a + 8b - 3c$ เท่ากับเท่าใด

8. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ที่ $a \neq 0, b \neq 0$ และ

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \mid ax + by = c\}$$

$$d = \text{ตัวหารร่วมมากของ } a \text{ และ } b$$

ถ้า $d \nmid c$ แล้วจงหาเซต S

9. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่ซึ่ง $f(n)$ แทนจำนวนคู่อันดับ (x, y) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับ $x + 2y = n$ โดยที่ x, y และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามสำหรับแต่ละจำนวนจริง t โดย

$$g(t) = 2t^3 + t^2 - 2t - 3$$

$$\text{จงหาค่าของ } (g^{-1} \circ f)(5)$$

10. กำหนดให้ $\mathbb{R} =$ เซตของจำนวนจริง ถ้า $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องเงื่อนไขดังนี้

$$x \cdot f(x) + f(1 - x) = 2x - x^2 \text{ ทุก } x \in \mathbb{R}$$

แล้วผลคูณ $\frac{1}{2545} f(2004)f(2546)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

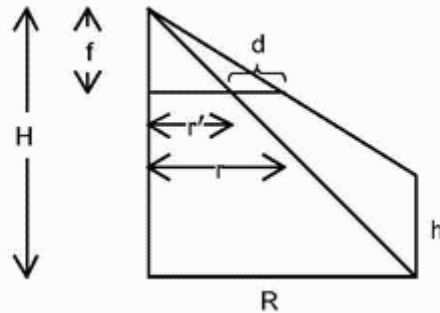


11. กำหนดให้ a_1, a_2, \dots, a_n เป็นจำนวนจริง และ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 + a_3 & a_3 + a_4 & \dots & a_1 + a_2 \\ a_2 + a_3 + a_4 & a_3 + a_4 + a_5 & \dots & a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 + a_3 + \dots + a_n & a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_1 & \dots & a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

จงหา a_1, a_2, \dots, a_n ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ที่ทำให้ดีเทอร์มิแนนท์ของ A ($|A|$) เป็นศูนย์ พร้อมบอกเหตุผลอย่างสั้น ๆ

12. จงหา h ในนิพจน์ของ d (ให้ $d = r - r'$) และ ค่าอื่น ๆ ที่กำหนดให้ในรูปภาพต่อไปนี้



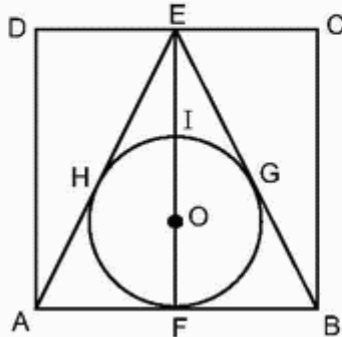
13. เส้นผ่านศูนย์กลาง AB ของวงกลมวงหนึ่ง ตั้งฉากกับคอร์ด CD ที่จุด Y ให้ K เป็นจุดบนส่วนโค้ง CBD ของวงกลม สร้างวงกลมอีกวงหนึ่งภายใน สัมผัสกับวงกลมเดิมที่จุด K และ สัมผัสกับ CD ที่จุด N ให้ AX เป็นความยาวเส้นสัมผัสจาก A มายังวงกลมที่สร้างขึ้น ถ้า AX ยาว a หน่วย แล้วจงหาความยาวของ AC^2

14. อาจารย์ผู้สอนวิชาภาษาไทย ต้องส่งนักเรียนชายและหญิง 2 คู่ ไปแข่งขันตอบปัญหา โดยคัดเลือกจากนักเรียนชาย 3 คน (ด.ช. จันท์, ด.ช. มนต์, ด.ช. ดล) และ นักเรียนหญิง 3 คน (ด.ญ. สุดา ด.ญ. ลัดดา ด.ญ. อารี) ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

- (1) ถ้าส่ง ด.ช. จันท์ ไป ควรจะส่ง ด.ญ. สุดา ไปเข้าคู่กัน
 - (2) ไม่ควรส่ง ด.ญ. สุดา ไป ถ้าเห็นว่าควรส่ง ด.ช. มนต์ ไป
 - (3) ไม่ควรส่ง ด.ช. มนต์ ไป ถ้าส่ง ด.ช. ดล หรือ ด.ญ. ลัดดา ไป
 - (4) ระหว่าง ด.ช. ดล และ ด.ญ. ลัดดา ต้องเก็บไว้แข่งขันได้วาที่ 1 คน
- จงพิจารณาว่าควรส่งนักเรียนคู่ใดไปแข่งขัน



15. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน CD มี F, G, H เป็นจุดสัมผัสของวงกลม (O) ที่แนบใน $\triangle AEB$, กับด้าน AB, BE และ EA ตามลำดับ EF ซึ่งผ่านจุดศูนย์กลาง O ตัดวงกลมนี้ที่จุด I ถ้ารัศมีของวงกลมนี้ยาว r หน่วย ผลคูณของ EI และ EF มีค่าเท่าไร (ตอบในพจน์ของ r)



16. กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็ม มีมุม A เป็นสองเท่าของมุม B และมุม C เป็นมุมป้าน ถ้าด้าน AC มีความยาวอยู่ระหว่าง 13 กับ 18 แล้วความยาวของเส้นรอบรูป $\triangle ABC$ เท่ากับเท่าใด
17. ให้ ABC เป็น \triangle ด้านเท่า จุด A', B', C' อยู่บนด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ ซึ่งทำให้ $|AC'| = 2|C'B|$, $|BA'| = 2|A'C|$ และ $|CB'| = 2|B'A|$ ถ้าพื้นที่ของ $\triangle ABC$ เท่ากับ 126 ตารางหน่วย จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นตรง AA', BB' และ CC'
18. ถ้ามีเงินอยู่ 1000 บาท จะแลกธนบัตรฉบับละ 20 บาท และ ฉบับละ 50 บาท จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะแลกธนบัตรให้ได้ทั้งสองชนิด โดยแลกทั้ง 1000 บาท นั้น
19. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนเซตของจำนวนตรรกยะ ดังต่อไปนี้

$$f(0) = 0, f(1) = 1 \text{ และ } f(x) = \begin{cases} \frac{f(2x)}{4} & , 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} + \frac{f(2x-1)}{4} & , \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

และ ถ้า $x = 0.b_1b_2b_3\dots$ เป็นจำนวนที่เขียนอยู่ในเลขฐาน 2 ของ x แล้ว จงหา $f(x)$ ที่เขียนอยู่ในเลขฐาน 2

20. ถ้า $K = \{ k \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{x^2 + kx - 1}{x^2 - x + 1} \right| < 2 \text{ ทุกจำนวนจริง } x \}$

แล้ว จงหาเซต K [ให้ตอบเป็นช่วง (interval)]

21. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยาม ดังต่อไปนี้

$$f(x) = |x - 2| \text{ และ } g(x) = \sqrt{(x^2 - 4)^2}$$

ถ้า h เป็นฟังก์ชันที่ซึ่ง $h = \frac{g}{f}$ และ $H = \{ x \in \mathbb{R} \mid h \circ h(x) \text{ หาค่าไม่ได้} \}$ แล้วจงหาเซต H



22. ครู 3 คน คือ ครูจักรวาล ครูชวลิต และ ครูทำนุ ไปเข้าค่ายกับนักเรียนกลุ่มหนึ่ง มีนักเรียน 3 คนในกลุ่มนี้ คือ ด.ญ. พุทรา ด.ญ. คะเน และ ด.ญ. บรรจง เป็นบุตรของครูแต่ละคนดังกล่าว
- ถ้าทราบว่า (ก) ด.ญ. คะเน เรียกน้องชายของครู ชวลิต ว่าคุณลุง
 (ข) บุตรสาวของครูทำนุ เคยพา ด.ญ. คะเน ไปพักที่บ้าน 1 คืน
 (ค) ด.ญ. พุทรา มีพี่สาว 1 คน แต่บิดาของเธอเป็นลูกโทษ

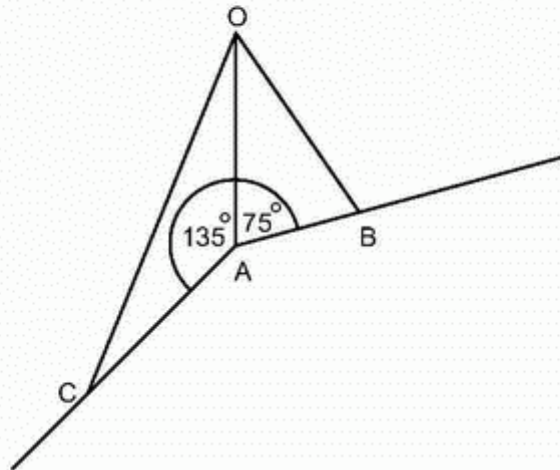
จงพิจารณาว่า ใครเป็นบิดาของ ด.ญ. บรรจง

23. กำหนดให้ A และ B เป็นจุดตัดของ $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 48 = 0$ และ $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 32 = 0$ จงหาสมการของกราฟที่เกิดจากเซตของจุด P ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุด P ไปยังจุด A และ B มีค่าเป็น 8 เสมอ

24. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ และ a เป็นจำนวนจริงค่าน้อยที่สุดซึ่งสอดคล้องสมการ

$$\det(A - aI_3) = 0 \text{ จงหา } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ ที่ทำให้ } (A - aI) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ และ } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

25. เสาส่งสัญญาณวิทยุสูง 40 เมตร ตั้งบนเนินเขา (OA ดังรูป) ช่างเทคนิคได้วัดระยะทางจากจุด A ไปยัง C ได้ 60 เมตร และ จากจุด A ไปยัง B ได้ 37 เมตร ถ้ามุม $\hat{OAC} = 135^\circ$ และ มุม $\hat{OAB} = 75^\circ$ แล้วลาดซึ่ง OC ยาวกี่เมตร





ข้อสอบแข่งขัน คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี 2547

วิชาคณิตศาสตร์

(สอบแข่งขันรอบที่ 1)

สอบวันเสาร์ที่ 3 กรกฎาคม 2547

เวลา 09.00 – 12.00 น.

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด(มี 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน)

1. ให้ ℓ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดทั้งสองของเส้นโค้ง 2 เส้น คือ $g(x) = 3x^2$ และ $h(x) = 2x^3$ และเส้นตรง ℓ มีความชันเท่ากับ m

ให้เอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U} = \{t \in \mathbb{R} \mid |t-1| \leq 2\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. $\forall t [t^2 + 8 \leq m]$

ข. $\exists t [t^2 - 8 > m]$

ค. $\forall t [t^2 - 3t + 8 < 4m]$

ง. $\exists t [t^2 - t + 8 > 4m]$

2. รูปสี่เหลี่ยม ABCD ใด ๆ มีจุดยอดอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง โดยที่ AC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม $\angle CAD = 28^\circ$, $\angle BDC = 65^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle OBD$

ก. 2°

ข. 3°

ค. 7°

ง. 8°

3. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(2) $\sin^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}} + \sin^{-1} \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก. (1) ถูก และ (2) ถูก

ข. (1) ถูก และ (2) ผิด

ค. (1) ผิด และ (2) ถูก

ง. (1) ผิด และ (2) ผิด

4. วงกลมวงหนึ่งอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 สัมผัสแกน x ที่จุด A สัมผัสแกน y ที่จุด B และ สัมผัสเส้นตรง $x + 2y - 3 - \sqrt{5} = 0$ ที่จุด C(a, b) จงหาค่าของ $a + b$

ก. $2 + \frac{3\sqrt{5}}{5}$

ข. $2 - \frac{3\sqrt{5}}{5}$

ค. $3 + \frac{2\sqrt{5}}{5}$

ง. $3 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$



5. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

- (1) เหตุ 1.1 $(\sim p \wedge t) \rightarrow \sim s$
 1.2 $q \vee r$
 1.3 $\sim r \wedge s$
 1.4 $p \rightarrow \sim q$
 ผล $\sim t$

- (2) เหตุ 2.1 $\sim q \vee r$
 2.2 $(m \leftrightarrow p) \wedge q$
 2.3 $r \rightarrow s$
 ผล $\sim(m \rightarrow p) \vee s$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- ก. (1) สมเหตุสมผล และ (2) สมเหตุสมผล ข. (1) สมเหตุสมผล แต่ (2) ไม่สมเหตุสมผล
 ค. (1) ไม่สมเหตุสมผล แต่ (2) สมเหตุสมผล ง. (1) ไม่สมเหตุสมผล และ (2) ไม่สมเหตุสมผล

6. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \dots + \frac{1}{\log_{10} x} \leq 1$ คือ เท่าใด

- ก. (0, 1) ข. $[10!, \infty)$ ค. $(0, 1) \cup (1, \infty)$ ง. $(0, 1) \cup [10!, \infty)$

7. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (1) ถ้า $a_n = \frac{3}{16n^2 - 4}$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ และมีผลบวกเท่ากับ 0.35
 (2) กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต ถ้า $a_3 = -24$ และ $2a_4^2 = 2a_2^2 + a_3^2$
 แล้ว $\sum_{n=1}^{15} a_n$ มีค่าเท่ากับ -585

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- ก. (1) ถูก และ (2) ถูก ข. (1) ถูก และ (2) ผิด
 ค. (1) ผิด และ (2) ถูก ง. (1) ผิด และ (2) ผิด

8. ถ้า $[(\sim(r \leftrightarrow q) \rightarrow s) \wedge \sim s] \rightarrow (x \vee y)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว $x \wedge y$ มีค่าความจริงตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- ก. $[\sim(x \wedge y) \rightarrow y] \rightarrow [(r \leftrightarrow q) \vee y]$
 ข. $[(x \wedge y) \rightarrow \sim y] \rightarrow [q \vee (y \leftrightarrow s)]$
 ค. $[(\sim x \rightarrow y) \wedge (r \leftrightarrow q)] \rightarrow [(s \leftrightarrow q) \wedge r]$
 ง. $(\sim y \rightarrow \sim x) \rightarrow [(\sim y \vee r) \leftrightarrow (\sim x \wedge y)]$



9. กำหนดให้ $i^2 = -1$

ถ้า $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin \theta$ แล้ว ผลบวก n พจน์ของอนุกรม $\sum_{k=1}^n (e^{i(2k-1)x} - e^{-i(2k-1)x})$ เมื่อ $x \neq 0$ มีค่า

เท่ากับเท่าใด

(สูตรการหาผลบวก n พจน์ของอนุกรมที่แต่ละพจน์เป็นจำนวนจริง สามารถนำมาใช้ได้กับอนุกรมนี้)

ก. $\frac{2i \sin nx}{\sin x}$

ข. $\frac{2i \sin^2 nx}{\sin x}$

ค. $\frac{2i \sin^3 nx}{\sin x}$

ง. $\frac{2i \sin^4 nx}{\sin x}$

10. ข้อใดต่อไปนี้ผิด

ก. ถ้า $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 10x + 7 + 4\sqrt{x^2 - 5x + 3} = 31 \}$ แล้ว ผลบวกของสมาชิกในเซต A เท่ากับ 5

ข. ถ้า $|x^2 - 4x + 3| \leq a$ ทุกค่า x ซึ่ง $|4x - 11| \leq 5$ แล้ว จำนวนจริง a ที่น้อยที่สุดซึ่งสอดคล้องกับสมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$ คือ $a = 3$

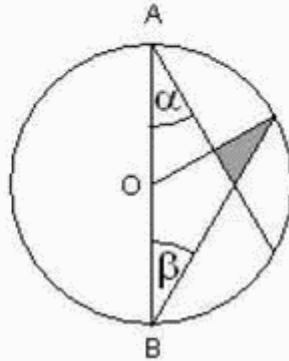
ค. ถ้า x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $x - 1 < y + 1$ แล้ว $\frac{1}{2}(x^2 - y^2) < x + y$

ง. ถ้า $a > 0, b > 0$ และ $a \neq b$ แล้ว $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$



ตอนที่ 2 จงเติมเฉพาะคำตอบลงในช่องว่างที่กำหนดให้ (มี 25 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน)

1. จากรูป วงกลมมีจุด O เป็นจุดศูนย์กลาง และมีรัศมี 1 หน่วย ถ้าให้ $\alpha = \beta$ และ $\gamma = 90^\circ$ จงหาพื้นที่ของบริเวณที่แรเงา



2. กำหนดให้ $2f\left(\frac{1}{x}\right) - 4f(2x) = 10x + 2$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง แล้ว f(5) เท่ากับเท่าใด

3. ถ้า $a \geq 1$ และ $x \in \mathbb{R}$ แล้ว จงหาค่าของ x ที่สอดคล้องกับสมการ $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$

4. กำหนด $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 10\sqrt{1-x^2}\}$

และ $s = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{x^2 + 4x + y + 2}{x - 2} = 0\}$

และ $h(x) = 5 - 2x, x \in D_{r^{-1}} \cap R_{s^{-1}}$

จงหาความยาวของ AB เมื่อ A และ B เป็นจุดปลายของ h

5. กำหนด $\csc^2(A + B) - \sin^2(A - B) + \sin^2(A - 3B) = \cos^2(B - A)$

โดยที่ $0 < A < \frac{\pi}{2}$ และ $0 < B < \frac{\pi}{2}$ จงหาค่าของ $\sin(B - A)$

6. ให้ N คือ จำนวนเต็มบวก

$P(N)$ คือ ผลคูณของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร N ลงตัว

จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดซึ่งทำให้ $P(P(2^n)) > 32^{988}$

7. กำหนดให้ $U = \{x \in \mathbb{I}^+ \mid x \leq 2500\}$

$$A_n = \{nx \mid x \in U\}, n \in \mathbb{I}^+$$

และ $B = A_8 \cap A_9 \cap A_{16} = \{b_i, b_2, \dots, b_j \mid b_i < b_j \text{ สำหรับ } i < j\}$ แล้ว

ก. จงหาค่าของ r เมื่อ b_r เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ B

ข. จงหาค่าของ n ที่เป็นจำนวนเฉพาะทั้งหมดที่ทำให้ $(b_{132} - b_{97}) \in A_n$

8. กำหนดฟังก์ชัน f โดยที่ $f(x) = \frac{kx}{-2x+k}, x \neq \frac{k}{2}$ เมื่อ k คือค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์ และ

ถ้า $f\left(f\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right) = \frac{1}{2+x^2}$ แล้ว k มีค่าเท่ากับเท่าใด



9. กำหนดให้ ลำดับ x, y, z เป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $x, y, z > 0$,

$$63x^2 + 2xz = z^2 \text{ และ } 3x^{1.6} - 47x^{0.8} = 16$$

จงหาค่าของ $7^{(1+\log_7 x)} + 10\log_x 2 + \log_z(264 - 2y) + \log_3 z + \log_z \left(\frac{x}{8}\right) - \log_3 x$

10. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & x & -1 \\ 1 & 3 & y & 0 \\ 0 & -1 & z & -2 \\ z & z & \frac{xy}{11} & x \end{bmatrix}$

ถ้า $\det(A) = x(2z + y + 1) - z(y + 1 - z)$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน

จงหาค่าของ $\frac{3}{2}(x + z) - 3y$

11. กำหนดให้ $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| + |y| \leq 2\}$

$$r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < 2y^2 - 4\}$$

$$r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^3 + y > 0\}$$

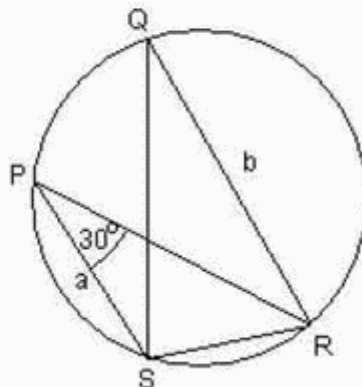
ก. ถ้าเรนจ์ของ $r_1 \cap r_2'$ คือ $[a, b]$ จงหาค่าของ a และ b

ข. ถ้าโดเมนของ $(r_1' \cup r_3)'$ คือ $[m, n]$ จงหาค่าของ m และ n

12. กำหนดให้ $\log_6 27 = r$ และ $6^{\log_{36} 576} = 2^{x+y} \cdot 3^{x-y}$

จงหาค่าของ $[(3 - r)\log_{\sqrt{2}} 108 - 2r]^{xy}$

13. จากรูป \overline{PS} ขนานกับ \overline{QR} ถ้าให้ PS ยาว a หน่วย QR ยาว b หน่วย และ $\angle SPR = 30^\circ$ จงหาความยาวของด้าน RS ในพจน์ของ a และ b โดยที่ $a, b \neq 0$



14. กำหนดให้ $16x^2 + 25y^2 - 64x - 50y - 311 = 0$ เป็นสมการของวงรี ถ้าพาราโบลาสองรูปมีจุดยอดอยู่ที่โฟกัสทั้งสองของวงรี และ ตัดกันที่จุดปลายทั้งสองของแกนโทของวงรี แล้ว จงเขียนสมการของพาราโบลาทั้งสองรูปนี้



15. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 3^2 & 3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5^4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3^2 \\ 0 & 0 & 5 \cos 2\theta & 5^2 \cos 2\theta & 5^3 \cos 2\theta \end{bmatrix}$

โดยที่ θ สอดคล้องเงื่อนไข $2\cot^2\theta + \csc^2\theta = 2$, $\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ แล้ว $\det(A)$ มีค่าเท่าใด

16. กำหนดสัญลักษณ์ $\xi[\log(\cos x)]_k = \log(\cos(\log(\cos(\dots(\log(\cos x)))))$)

เมื่อ k เป็นจำนวนนับ เช่น

$$\xi[\log(\cos x)]_1 = \log(\cos x)$$

$$\xi[\log(\cos x)]_2 = \log(\cos(\log(\cos x)))$$

$$\xi[\log(\cos x)]_3 = \log(\cos(\log(\cos(\log(\cos x)))))$$

จงหาค่าของ x ทั้งหมดที่เป็นไปได้เมื่อ $\frac{2\pi}{3} < |x| < \frac{9\pi}{2}$

ที่ทำให้ $\sum_{k=1}^n (k\xi[\log(\cos x)]_k)$ มีค่ามากที่สุด

17. ให้ $y^2 = 8x$ เป็นสมการของพาราโบลา ให้ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลานี้ และขนานกับเส้นตรง $y = 2\sqrt{2}x + 5$ ถ้าเส้นตรง l ตัดกับแกน y ที่จุด A และมีจุดตัดพาราโบลาคู่หนึ่งเป็น $B(b, c)$ เมื่อ $b > 0$ และ $c > 0$ จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด $A, B(b, c)$ และ $C(0, c)$

18. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $\hat{ACB} = \frac{\pi}{8}$, $|\overline{BC}| = 5$ และ D เป็นจุดบน \overline{AC} , E เป็นจุดบน

$$\overline{BC} \text{ ที่ทำให้ } \hat{EDC} = \frac{\pi}{4}, |\overline{CE}| = \frac{10}{3}, \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DE}|} = \frac{9}{8} \text{ จงหาค่าของ } \cos A$$

19. ให้ $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ถ้า $f(x^2) = 5$ จงหาค่าของ $f(x^5)$



20. กำหนดให้ A, B, C เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ 3 โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -x & -y & z \\ 0 & y & 2z \\ x & -y & z \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } x, y, z \text{ เป็นจำนวนจริงบวก}$$

$$\text{และ } B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 42 \end{bmatrix} \text{ ถ้า } C = A + B \text{ จงหาค่าของ}$$

ก. x, y, z

ข. det (adj C)

21. จากจุด P บนแกน y ลากเส้นตรงสองเส้นสัมผัสกราฟของสมการ $x^2 - 6x + y^2 + 6y + 14 = 0$ ที่จุด Q และ R ถ้าพิกัดของ Q คือ $(4, -3 + \sqrt{3})$ จงหาความยาวของส่วนของเส้นตรง QR

22. กำหนดให้ $1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{64} + \dots$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

$$\text{จงหาผลบวกของค่า } x \text{ ทั้งหมดที่สอดคล้องสมการ } 10 \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{64} + \dots \right) - 10 \frac{12x}{(8x^2 + 8x - 2)} = 0$$

23. กำหนดให้เอกภาพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนเต็ม

A คือ เซตของเศษที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่เกิดจากการหาร $a^3 + b^3$ ด้วย 9

เมื่อ $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$

และ B คือ เซตของ ห.ร.ม. ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ $n - 1$ กับ $n^2 + n + 1$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

จงหา $A \cap B'$

24. กำหนดระบบสมการ

$$x + y - z = 2$$

$$x + 2y + z = 3$$

$$x + y + (a^2 - 5)z = a$$

และ $b = \frac{a}{2}$ โดยที่ a คือ จำนวนจริงที่ทำให้ระบบสมการไม่มีคำตอบ

ให้เมทริกซ์ $C = [c_{jk}]_{n \times n}$, c_{jk} เป็นจำนวนจริง

โดยที่ $c_{jk} = e^{b^2}$, e เป็นจำนวนจริง สำหรับ $j = 1, 2, \dots, n$ และ $c_{jk} = 0$ เมื่อ $j > k$

จงหา det (C) เมื่อ $n = 25$



25. สี่เหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีด้านด้านหนึ่งขนานกับแกน x มีเส้นทแยงมุมเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$ กับจุด $(-3, q)$ โดยที่เส้นทแยงมุมนี้ไม่ขนานกับแกน y ถ้าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากดังกล่าว มีค่าอยู่ระหว่าง 16 และ 35 ตารางหน่วย จงหาว่า
- ค่าของ q อยู่ในช่วงใด
 - ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากรูปนี้อยู่ในช่วงใด