

13.1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

13.2 (1) สัญลักษณ์ $x \rightarrow a^-$ อ่านว่า

x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย

(2) สัญลักษณ์ $x \rightarrow a^+$ อ่านว่า

x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา

(3) สัญลักษณ์ $x \rightarrow a$ อ่านว่า

x เข้าใกล้ a

13.3 กำหนด $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x \geq 2 \\ 4 & \text{เมื่อ } x < 2 \end{cases}$

จงหา $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

13.4 กำหนด $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ x+1 & \text{เมื่อ } x \leq 0 \end{cases}$

ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ตามลำดับคือเท่าใด

13.5 กำหนด $f(x) = |x^2 - 9|$ จงหาค่าของ

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

13.6 กำหนด $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ ถ้า

$a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ และ $b = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ แล้วค่าของ

$a + b$ เท่ากับเท่าใด

13.7 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ จงพิจารณา

ข้อความต่อไปนี้

ก $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2$

ข $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$

ข้อสรุปใดถูก

1. ถูกทั้ง 2 ข้อ
2. ข้อ ก ถูก ข้อ ข ผิด
3. ข้อ ก ผิด ข้อ ข ถูก
4. ผิดทั้งสองข้อ

13.8 กำหนดให้ $f(x) = \frac{|x|}{x} - x$ แล้วข้อใด

ต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$

2. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

13.9 กำหนด $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{เมื่อ } x^2 < 1 \\ \frac{1}{1 - x} & \text{เมื่อ } x^2 > 1 \end{cases}$

ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ตามลำดับคือ

13.10 กำหนด $f(x) = \frac{1}{3 + 2^{\frac{1}{x}}}$ ถ้า

$a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ และ $b = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ แล้วค่าของ ab

เท่ากับเท่าไร

13.11 กำหนด $f(x) = \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}}$ แล้วค่าของ

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ คูณกัน มีค่าเท่ากับเท่าไร

13.12 กำหนด $f(x) = \frac{3x + |x|}{7x - 5|x|}$ ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

มีค่าเท่ากับเท่าไร

$$13.13 \text{ ให้ } f(x) = \begin{cases} \frac{|x|-1}{\sqrt{1-x}} & \text{เมื่อ } x < 1 \\ \frac{|1-x|}{1-\sqrt{x}} & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้
2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) > 0$ และ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) < 0$
3. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$
4. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$

14.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

$$14.2 \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$14.3 \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

$$14.4 \text{ กำหนด } f(x) = x+2 \text{ จงหา } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$14.5 \text{ กำหนดให้ } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \\ 2x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$$

จงหา

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$14.6 \text{ กำหนดให้ } f(x) = \frac{|x|}{x} \text{ จงหา } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

14.7 การหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

14.8 การใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

$$14.8.1 \quad 1) \lim_{x \rightarrow 1} 5$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} 3$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (-4)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{8}$$

14.8.2 1) $\lim_{x \rightarrow 4} x$

2) $\lim_{x \rightarrow -3} x$

3) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} x$

14.8.3 1) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$

2) $\lim_{x \rightarrow -1} x^3$

3) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} x^4$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} x^5$

14.8.4 1) $\lim_{x \rightarrow 4} 3x^2$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} (-2x^3)$

14.8.5 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 4x)$

14.8.6 1) $\lim_{x \rightarrow -2} (2x - 3x^2)$

14.8.7 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 3)(x - 1)$

14.8.8 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-1}$

14.8.9 1) $\lim_{x \rightarrow 3} (x+1)^2$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3)^{\frac{1}{3}}$

14.8.10 1) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[4]{x^2 + 16}$

14.8.11 1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 4x - 5)$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 3} \right]$

14.9 กำหนด $f(x) = 2x + 3$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

มีค่าเท่ากับเท่าไร

14.10 กำหนดให้ $A = \lim_{x \rightarrow 2} 5(2x - 1)(x + 1)$

$$B = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 1}$$

แล้วค่าของ $A+B$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

14.11 กำหนด $A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

$$B = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}}$$

แล้ว ค่าของ $\frac{A}{B^2}$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

14.12 ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 5x + 6}$ มีค่าเท่ากับ

เท่าไร

14.13 กำหนดให้ $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x}$

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3 - bx^2 + x}{x}$$

แล้ว ค่าของ AB คือค่าในข้อใด

14.14 ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ เท่ากับเท่าไร

14.15 กำหนด $f(x) = \sqrt{2x}$ และค่าของ

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

14.16 ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

14.17 ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h^2 + 3hx^2 + x^3}{2hx + 5x^2}$ เท่ากับเท่าไร

14.18 ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

14.19 กำหนด $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2-4}}{2-|x|}$ แล้ว ค่าของ

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

14.20 กำหนด $f(x) = \begin{cases} 0 ; 0 \leq x < 2 \\ 1 ; 2 \leq x < 4 \\ 2 ; 4 \leq x < 6 \end{cases}$

ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

14.21 กำหนดข้อความเป็น

$$\text{ก. ถ้า } f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{เมื่อ } x \geq 2 \\ 3x + 2 & \text{เมื่อ } x < 2 \end{cases}$$

แล้ว $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$

ข. ถ้า $f(x) = \frac{x^3 - 64}{x - 4}$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 16$

ข้อใดสรุปเกี่ยวกับข้อความข้างต้นได้ถูกต้อง

1. ข้อ ก ถูกข้อเดียว
2. ข้อ ข ถูกข้อเดียว
3. ข้อ ก และ ข้อ ข ถูก
4. ข้อ ก และ ข้อ ข ผิด

14.22 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ x + 1 & \text{เมื่อ } x \leq 0 \end{cases}$

แล้ว $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ มีค่าเท่าไร

14.23 กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ แล้ว

ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

14.24 กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ แล้ว

ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

14.25 กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ แล้ว

ค่าของ $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

14.26 กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ แล้ว

ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 kx}{x^2}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

14.27 กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ แล้วค่าของ

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(t - \pi)}{\pi} \text{ มีค่าเท่าใด}$$

14.28 กำหนด

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 9} & \text{เมื่อ } x \neq -4 \\ 4 + x & \text{เมื่อ } x = -4 \end{cases}$$

แล้วค่าของของ $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ มีค่าเท่าใด

14.29 กำหนด $A = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right]$ และ

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} [x + \sqrt{x^2 - 1}]$$

ข้อใดสรุปได้ถูกต้อง

1. $A = 0, B = 1$
2. $A = 0, B = 0$
3. $A = 1, B = 1$
4. หาค่า A และ B ไม่ได้เพราะทั้งคู่หาค่าลิมิตไม่ได้

14.30 กำหนด $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

14.31 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

14.32 $f(a)$ หาค่าไม่ได้

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ หาค่าไม่ได้}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

14.33 กำหนด $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ แล้ว

ข้อใดต่อไปนี้สรุปได้ถูกต้อง

1. f ต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $x = 1$
2. f ต่อเนื่องที่ $x = 0$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$
3. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ แต่ต่อเนื่องที่ $x = 1$
4. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $x = 1$

14.34 กำหนดให้ฟังก์ชันเป็นดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ 4 & \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$$

ข้อความต่อไปนี้ สรุปไม่ถูกต้อง

1. ฟังก์ชันนี้ ต่อเนื่องที่ $x = 3$
2. ฟังก์ชันนี้ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$
3. ฟังก์ชันนี้ ต่อเนื่องที่ $x = 1$
4. ฟังก์ชันนี้ ต่อเนื่องที่ $x = 5$

14.35 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{เมื่อ } x \neq 2 \\ 4 & \text{เมื่อ } x = 2 \end{cases}$

แล้ว ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

14.36 กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{25 - x^2} - 3}{x - 4} & \text{เมื่อ } x > 4 \\ \frac{x - 8}{2x - 5} & \text{เมื่อ } x \leq 4 \end{cases}$$

แล้ว ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่ $x = 4$ หรือไม่

14.37 กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{เมื่อ } x > 2 \\ \frac{1}{x+2} & \text{เมื่อ } x \leq 2 \end{cases}$$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นสรุปได้ถูกต้อง

1. f ต่อเนื่องที่ $x = 2$
2. f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ เพราะ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้
3. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$ เพราะ $f(2)$ หาค่าไม่ได้
4. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$ เพราะ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$

14.38 กำหนด $f(x) = \frac{x+1}{x^2+7x+6}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็น

สรุปได้ถูกต้อง

1. f ต่อเนื่องที่ $x = -1$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -6$
2. f ต่อเนื่องที่ $x = -6$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$
3. f ต่อเนื่องที่ $x = -1, -6$
4. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1, -6$

14.39 กำหนด

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-6x}{x^2-5x+6} & \text{เมื่อ } x \neq 2 \text{ และ } x \neq 3 \\ 4 & \text{เมื่อ } x = 2 \\ 6 & \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นสรุปได้ถูกต้อง

1. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$
2. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$
3. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$ และ $x = 3$
4. f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ และ $x = 3$

14.40 กำหนด

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+2x}{x^2-x-2} & \text{เมื่อ } x \neq 2, x \neq -1 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 2 \\ \frac{2}{3} & \text{เมื่อ } x = -1 \end{cases}$$

ค่าของ x ที่ทำให้ฟังก์ชันนี้ไม่ต่อเนื่องคือ

$$14.41 \text{ กำหนด } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} & \text{เมื่อ } x \neq 2 \\ kx + 1 & \text{เมื่อ } x = 2 \end{cases}$$

ถ้า f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ แล้วค่า k มีค่าเท่าใด

14.42 กำหนด

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } x = 2 \\ \frac{x^2 - 4x + 4}{|x - 2|} & \text{เมื่อ } x \neq 2 \end{cases}$$

ถ้า f ต่อเนื่องที่ $x=2$ แล้ว ค่าของ x เป็นเท่าใด

$$14.43 \text{ กำหนด } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \text{ เมื่อ } x \neq 2,$$

$x \neq -2$ จะต้องนิยามเพิ่มเติมตามข้อใด จึงจะทำให้ $f(x)$ ต่อเนื่อง ที่ $x=2$

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. $f(2)=2$ | 2. $f(2)=4$ |
| 3. $f(2)=\frac{1}{4}$ | 4. $f(2)=\frac{1}{2}$ |